

# Lineare Algebra

www.schulmathe.npage.de

## Inhaltsverzeichnis

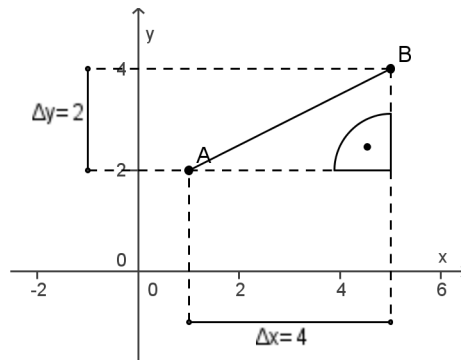
<b>1</b>	<b>Koordinatengeometrie der Ebene</b>	<b>3</b>
1.1	Länge einer Strecke . . . . .	3
1.2	Mittelpunkt einer Strecke . . . . .	3
1.3	Der Flächeninhalt eines Dreiecks . . . . .	4
1.3.1	Kollinearität von Punkten . . . . .	5
1.4	Teilpunkt einer Strecke . . . . .	5
1.4.1	Berechnung der Koordinaten des Teilpunktes einer Strecke . . . . .	7
1.5	Der Schwerpunkt eines Dreiecks . . . . .	8
1.6	Geradengleichungen . . . . .	9
1.6.1	Explizite Form . . . . .	9
1.6.2	Zweipunkteform . . . . .	9
1.6.3	Punktrichtungsform . . . . .	10
1.6.4	Achsenabschnittsform . . . . .	10
1.6.5	Allgemeine Form . . . . .	11
1.7	Schnittwinkel zweier Geraden . . . . .	11
1.8	Anwendung der Orthogonalität . . . . .	12
1.8.1	Abstand Punkt - Gerade . . . . .	12
1.8.2	Abstand Gerade - Gerade . . . . .	13
1.8.3	Mittelpunkt und Radius des Umkreises eines Dreiecks . . . . .	14
1.9	Der Kreis . . . . .	15
1.9.1	Punkt - Kreis . . . . .	16
1.9.2	Gerade - Kreis . . . . .	16
1.9.3	Kreis - Kreis . . . . .	17
1.9.4	Tangente an den Kreis durch einen Berührungspunkt . . . . .	18
1.9.5	Tangenten an einen Kreis von einem Punkt außerhalb . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Lineare Gleichungssysteme LGS</b>	<b>21</b>
2.1	Zwei Variablen und zwei Gleichungen . . . . .	21
2.2	Lösung mit Determinanten . . . . .	22
2.3	Drei Variablen und drei Gleichungen . . . . .	23
2.4	Gauß'sches Eliminationsverfahren . . . . .	23

2.5	Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme . . . . .	25
2.6	Lösungsmenge bei LGS mit unendlich vielen Lösungen . . . . .	27
2.7	Homogene und inhomogene LGS . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Koordinatengeometrie im Raum</b>	<b>30</b>
3.1	Das räumliche kartesische Koordinatensystem . . . . .	30
3.2	Strecken im Raum . . . . .	30
3.3	Vektoren . . . . .	31
3.3.1	Addition von Vektoren . . . . .	32
3.3.2	Subtraktion von Vektoren . . . . .	32
3.3.3	Rechnerische Addition und Subtraktion . . . . .	33
3.3.4	Vervielfachung von Vektoren . . . . .	34
3.3.5	Linearkombinationen von Vektoren . . . . .	34
3.3.6	Lineare Un- und Abhängigkeit . . . . .	36
3.4	Basis und Koordinatensystem . . . . .	37
3.4.1	Betrag eines Vektors . . . . .	38
3.5	Geraden in der Ebene und im Raum . . . . .	38
3.5.1	Punktgleichung . . . . .	38
3.5.2	Zweipunkteform . . . . .	39
3.5.3	Umwandlung parameterfreie Form - Parameterform . . . . .	39
3.5.4	Lagebeziehung Punkt - Gerade . . . . .	40
3.5.5	Lagebeziehung Gerade - Gerade . . . . .	41
3.6	Ebenen im Raum . . . . .	41
3.6.1	Punktgleichung . . . . .	41
3.6.2	Dreipunkteform . . . . .	42
3.6.3	Ermittlung einer parameterfreien Ebenengleichung . . . . .	42
3.6.4	Lagebeziehung Punkt - Ebene . . . . .	43
3.6.5	Lagebeziehung Gerade - Ebene . . . . .	44
3.6.6	Lagebeziehung Ebene - Ebene . . . . .	45
3.7	Das Skalarprodukt . . . . .	46
3.7.1	Berechnung des Skalarprodukts aus den Koordinaten der Vektoren . . . . .	47
3.7.2	Winkelberechnungen . . . . .	48
3.7.3	Länge der senkrechten Projektion eines Vektors . . . . .	51
3.8	Hessche Normalenform der Geraden- und Ebenengleichung . . . . .	51
3.9	Abstandsberechnungen . . . . .	53
3.9.1	Abstand Punkt - Gerade in der Ebene (Punkt - Ebene im Raum) . . . . .	53
3.9.2	Abstand windschiefer Geraden . . . . .	53
3.9.3	Abstand Punkt - Gerade im Raum . . . . .	54
3.9.4	Abstand paralleler Geraden im Raum . . . . .	54
3.10	Vektorprodukt (Kreuzprodukt) . . . . .	54

# 1 Koordinatengeometrie der Ebene

## 1.1 Länge einer Strecke

Bsp.:  $A(1|2)$   $B(5|4)$

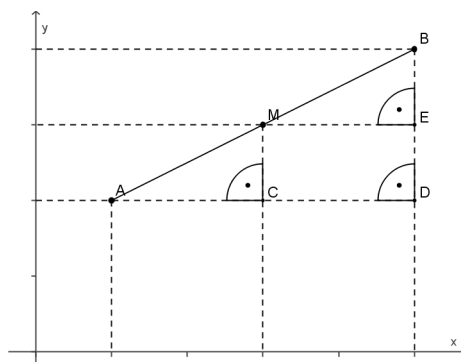


$$\overline{AB} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} \text{ LE}$$

Allgemein: Mit  $A(x_1 | y_1)$  und  $B(x_2 | y_2)$  gilt:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (1.1)$$

## 1.2 Mittelpunkt einer Strecke



C ist der Mittelpunkt von der Strecke  $\overline{AD}$ .

Es gilt der Strahlensatz:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{1}{2}$$

Mit  $A(x_1 | y_1)$  und  $B(x_2 | y_2)$  gilt:

$$x_M = x_C = \frac{x_1 + x_2}{2} \rightarrow C(x_C | y_1)$$

$$y_M = y_E = \frac{y_1 + y_2}{2} \rightarrow D(x_2 | y_D)$$

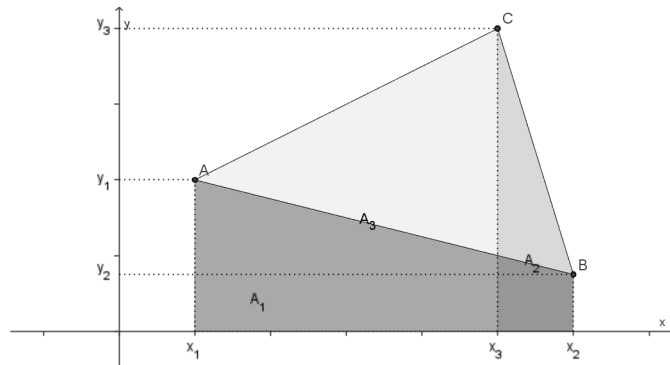
Allgemein:

Die Strecke  $\overline{AB}$  mit  $A(x_A | y_A)$  und  $B(x_B | y_B)$  hat den Mittelpunkt  $M(x_M | y_M)$  mit:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad ; \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \quad (1.2)$$

### 1.3 Der Flächeninhalt eines Dreiecks

Gesucht ist die Fläche des Dreiecks  $ABC$  mit  $A(x_1 | y_1)$ ,  $B(x_2 | y_2)$ ,  $C(x_3 | y_3)$ . Man versucht drei Trapezflächen zu erstellen (siehe Abbildung).



$$A = A_2 + A_3 - A_1$$

Für die Flächen gelten folgende Ausdrücke:

$$A_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1)$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_2 - x_3)$$

$$A_3 = \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1)$$

$$A = \frac{1}{2} \left[ (y_2 + y_3)(x_2 - x_3) + (y_1 + y_3)(x_3 - x_1) - (y_1 + y_2)(x_2 - x_1) \right]$$

Zusammengefasst ergibt sich der allgemeine Ausdruck (1.3). Da die Lage der Punkte  $A, B$  und  $C$  zueinander variieren kann, gilt für beliebige Punkte  $A, B$  und  $C$  :

$$A = \left| \frac{1}{2} \left[ x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) \right] \right| \quad (1.3)$$

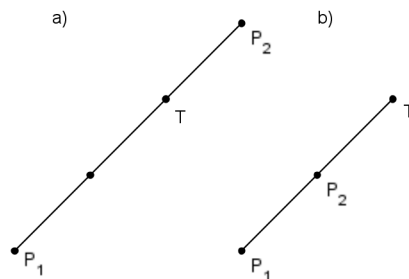
### 1.3.1 Kollinearität von Punkten

Liegen drei oder mehr Punkte auf einer Geraden, so nennt man sie kollinear. Kollinearität kann man unter anderem mit der Flächeninhaltsformel (1.3) berechnen:

$$A(-2|1) \quad B(4|3) \quad C(-5|0)$$

$$A = \frac{1}{2} \left| -2(3 - 0) + 4(0 - 1) - 5(1 - 3) \right| = 0 \quad \Rightarrow \quad A, B, C \text{ sind kollinear.}$$

### 1.4 Teilpunkt einer Strecke



a) Liegt  $T$  zwischen  $P_1$  und  $P_2$ , so ist  $T$  ein innerer Teilpunkt.

$$\frac{\overline{P_1T}}{\overline{TP_2}} = \frac{2}{1} = 2$$

b) Liegt  $T$  außerhalb der Strecke  $\overline{P_1P_2}$ , so ist  $T$  ein äußerer Teilpunkt.

$$\frac{\overline{P_1T}}{\overline{TP_2}} = \frac{2}{1} = 2$$

Um die innere und äußere Teilung unterscheiden zu können, legt man zusätzlich fest:

- die zu teilende Strecke bekommt eine Richtung:

$$\overrightarrow{P_1P_2}$$

- eine Teilstrecke bekommt eine positive Maßzahl, wenn sie in die gleiche Richtung, wie die Gesamtstrecke zeigt und eine negative Maßzahl, wenn sie in die Gegenrichtung zeigt.

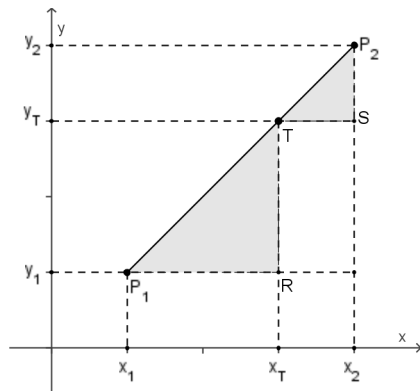
- Bezeichnung der Maßzahl für die Länge einer Strecke:  $m(\overrightarrow{P_1P_2})$

⇒ Bei äußerer Teilung ist das Teilverhältnis negativ.

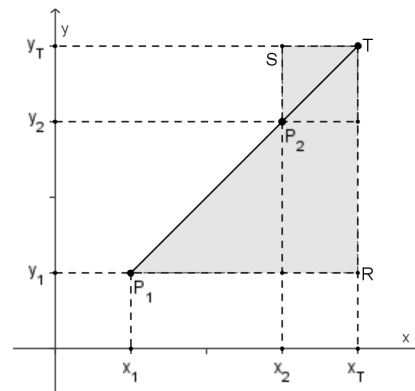
zu b)

$$\frac{m(\overrightarrow{P_1T})}{m(\overrightarrow{TP_2})} = \frac{2}{-1} = -2$$

### 1.4.1 Berechnung der Koordinaten des Teilpunktes einer Strecke



innere Teilung



äußere Teilung

Die Dreiecke  $P_1RT$  und  $P_2TS$  sind jeweils ähnlich. Also gilt:

$$\frac{\overrightarrow{P_1T}}{\overrightarrow{TP_2}} = \frac{\overrightarrow{P_1R}}{\overrightarrow{TS}} = \frac{x_T - x_1}{x_2 - x_T} = \lambda$$

$$\frac{\overrightarrow{P_1T}}{\overrightarrow{TP_2}} = \frac{\overrightarrow{TR}}{\overrightarrow{P_2S}} = \frac{y_T - y_1}{y_2 - y_T} = \lambda$$

Durch Umstellen erhält man:

$$x_T = \frac{\lambda x_2 + x_1}{1 + \lambda}$$

$$y_T = \frac{\lambda y_2 + y_1}{1 + \lambda}$$

Satz:

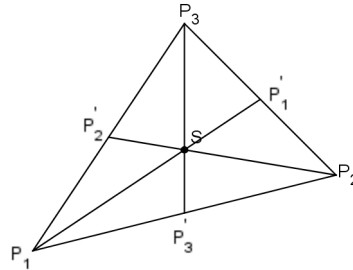
Es seien  $P_1(x_1 | y_1)$  und  $P_2(x_2 | y_2)$  die Endpunkte einer gerichteten Strecke  $\overrightarrow{P_1P_2}$  und  $\lambda$  das Teilverhältnis eines von  $P_2$  verschiedenen Punktes  $T$  der Geraden durch  $P_1$  und  $P_2$ . So gilt:

$$\lambda = \frac{x_T - x_1}{x_2 - x_T} = \frac{y_T - y_1}{y_2 - y_T} \quad (1.4)$$

$$x_T = \frac{\lambda x_2 + x_1}{1 + \lambda} \quad y_T = \frac{\lambda y_2 + y_1}{1 + \lambda} \quad (1.5)$$

## 1.5 Der Schwerpunkt eines Dreiecks

Der Schwerpunkt ist der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden eines Dreiecks. Er teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2 : 1.



$P'_2$  ist der Mittelpunkt der Strecke  $\overline{P_1P_3}$  und es gilt:

$$x'_2 = \frac{x_1 + x_3}{2} \quad y'_2 = \frac{y_1 + y_3}{2}$$

Für die Seitenhalbierende  $P_2P'_2$  gilt weiter:

$$\frac{\overrightarrow{P_2S}}{\overrightarrow{SP'_2}} = \frac{2}{1} = 2 = \lambda$$

$$x_S = \frac{x_2 + \lambda x'_2}{1 + \lambda} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$y_S = \frac{y_2 + \lambda y'_2}{1 + \lambda} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

Satz:

Sind  $P_1(x_1 | y_1)$ ,  $P_2(x_2 | y_2)$  und  $P_3(x_3 | y_3)$  Eckpunkte eines Dreiecks, so gilt für dessen Schwerpunkt:

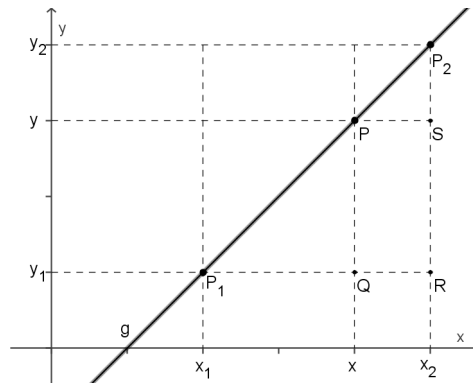
$$x_S = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad y_S = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \quad (1.6)$$

## 1.6 Geradengleichungen

### 1.6.1 Explizite Form

$$y = mx + n \quad (1.7)$$

### 1.6.2 Zweipunkteform



Gesucht ist eine Gleichung für die Gerade  $g$  durch die Punkte  $P_1(x_1 | y_1)$  und  $P_2(x_2 | y_2)$ .

Strahlensatz:

$$\frac{\overline{P_2R}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{P_1R}}{\overline{P_1Q}}$$

$$\frac{y_2 - y_1}{y - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{x - x_1}$$

$$(y_2 - y_1)(x - x_1) = (x_2 - x_1)(y - y_1) \quad (1.8)$$

### 1.6.3 Punktrichtungsform

Aus der Zweipunkteform (1.8) folgt:

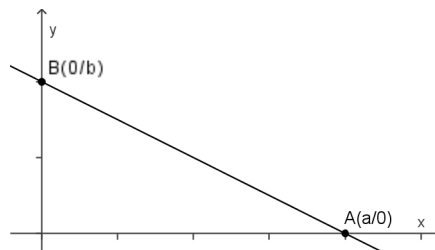
$$(y_2 - y_1)(x - x_1) = (x_2 - x_1)(y - y_1)$$

$$y - y_1 = \frac{(y_2 - y_1)(x - x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$y - y_1 = \underbrace{\left( \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right)}_m \cdot (x - x_1)$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \tag{1.9}$$

### 1.6.4 Achsenabschnittsform



Aus der Zweipunkteform (1.8) mit  $P_1 = A$  und  $P_2 = B$  folgt:

$$(y_2 - y_1)(x - x_1) = (x_2 - x_1)(y - y_1)$$

$$(b - 0)(x - a) = (0 - a)(y - 0)$$

$$\vdots$$

$$1 = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \tag{1.10}$$

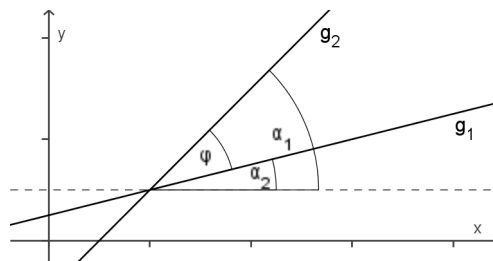
### 1.6.5 Allgemeine Form

Jede Gerade lässt sich in einer Gleichung der Form  $Ax + By = C$  beschreiben. Diese Form nennt man allgemeine Form. (Dabei dürfen A und B nicht gleichzeitig 0 sein.)

Sonderfälle:

1.  $A = 0; B \neq 0; C \neq 0 \rightarrow$  Parallele zur  $x$ -Achse
2.  $A \neq 0; B = 0; C \neq 0 \rightarrow$  Parallele zur  $y$ -Achse
3.  $A \neq 0; B \neq 0; C = 0 \rightarrow$  Gerade geht durch  $O(0|0)$
4.  $A = 0; B \neq 0; C = 0 \rightarrow$   $x$ -Achse
5.  $A \neq 0; B = 0; C = 0 \rightarrow$   $y$ -Achse

### 1.7 Schnittwinkel zweier Geraden



Gesucht ist der Schnittwinkel  $\varphi$  der Geraden  $g_1 = m_1x + n_1$  und  $g_2 = m_2x + n_2$ .

Festlegung:

Als Schnittwinkel zweier Geraden gilt stets der Winkel  $\varphi$ , für den gilt:  $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ .

$$\varphi = \alpha_1 - \alpha_2$$

$$\tan(\alpha_1) = m_1$$

$$\tan(\alpha_2) = m_2$$

$$\tan(\varphi) = \tan(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\tan(\alpha_1) - \tan(\alpha_2)}{1 + \tan(\alpha_1) \cdot \tan(\alpha_2)}$$

$$\tan(\varphi) = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

Satz:

Sind  $m_1$  und  $m_2$  die Anstiege zweier Geraden, so gilt für deren Schnittwinkel  $\varphi$ :

$$\tan(\varphi) = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| \quad (1.11)$$

Sonderfälle:

$$\begin{array}{lll} \varphi = 0 & \rightarrow \tan(\varphi) = 0 & \rightarrow m_1 - m_2 = 0 \\ & \rightarrow m_1 = m_2 & \Rightarrow g_1 \parallel g_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \varphi = 90^\circ & \rightarrow \tan(\varphi) \text{ nicht definiert} & \rightarrow 1 + m_1 m_2 = 0 \\ & \rightarrow m_1 m_2 = -1 & \Rightarrow g_1 \perp g_2 \end{array}$$

## 1.8 Anwendung der Orthogonalität

$$g_1 \parallel g_2: \quad m_1 = m_2$$

$$g_1 \perp g_2: \quad m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

### 1.8.1 Abstand Punkt - Gerade

Lösungsalgorithmus:

1. Geradengleichung für eine Gerade  $h$  aufstellen, die den Punkt  $P$  enthält und senkrecht zur Geraden  $g$  verläuft.
2. Schnittpunkt  $Q$  von  $g$  und  $h$  bestimmen.
3. Länge der Strecke  $\overline{PQ}$  mit der Gleichung (1.1) ermitteln. Dies entspricht dem gesuchten Abstand.

Beispiel:

$$g: y = 2x - 8 \quad P(3|4)$$

$$1. \quad 4 = -\frac{1}{2} \cdot 3 + n \rightarrow n = 5,5 \Rightarrow \underline{h: y = -\frac{1}{2}x + 5,5}$$

2.

$$y = y$$

$$2x - 8 = -\frac{1}{2}x + 5,5$$

$$x = 5,4$$

$$y = 2x - 8$$

$$y = 2,8 \quad \underline{Q(5,4|2,8)}$$

3.  $\underline{\underline{\overline{PQ} = \sqrt{7,2}}}$

### 1.8.2 Abstand Gerade - Gerade

Lösungsalgorithmus:

1. Geradengleichung für eine Gerade  $i$  aufstellen, die senkrecht zu den Geraden  $g$  und  $h$  verläuft.
2. Den Schnittpunkt  $P$  mit der Geraden  $g$  ermitteln.
3. Den Schnittpunkt  $Q$  mit der Geraden  $h$  ermitteln.
4. Länge der Strecke  $\overline{PQ}$  mit der Gleichung (1.1) ermitteln. Dies entspricht dem gesuchten Abstand.

Beispiel:

$$g : y = 2x + 5 \quad h : 2x - 3$$

1.  $\underline{i : y = -\frac{1}{2}x + 5}$

2.  $\underline{P(0|5)}$

3.

$$2x - 3 = -\frac{1}{2}x + 5$$

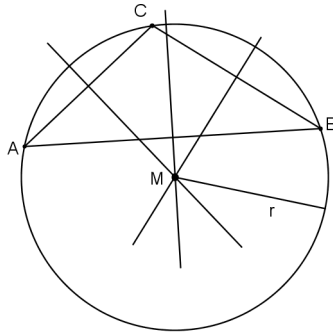
$$x = 3,2$$

$$y = 2(3,2) - 3$$

$$y = 3,4 \quad \underline{Q(3,2|3,4)}$$

4.  $\underline{\underline{\overline{PQ} = \sqrt{12,8}}}$

### 1.8.3 Mittelpunkt und Radius des Umkreises eines Dreiecks



Lösungsalgorithmus:

1. Den Mittelpunkt zweier beliebiger Seiten bestimmen.
2. Den Anstieg dieser Seiten ermitteln.
3. Die Gleichungen der Mittelsenkrechten aufstellen.
4. Schnittpunkt  $M$  der Mittelsenkrechten bestimmen. Dieser Punkt entspricht dem Mittelpunkt des Umkreises.
5. Den Abstand  $r$  vom Mittelpunkt  $M$  zu einem beliebigen Eckpunkt des Dreiecks ermitteln. Dies entspricht dem Radius des Umkreises.

Beispiel:

$$A(0|3) \quad B(1|0) \quad C(8|7)$$

$$1. \quad \underline{M_{\overline{AB}} \left( \frac{1}{2} \mid \frac{3}{2} \right)} \quad \underline{M_{\overline{BC}} \left( \frac{9}{2} \mid \frac{7}{2} \right)}$$

$$2. \quad \underline{m_{\overline{AB}} = -3} \quad \underline{m_{\overline{BC}} = 1}$$

3. Aus Gleichung (1.7) ergibt sich:

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \right) + n \quad \frac{7}{2} = -1 \cdot \frac{9}{2} + 2$$

$$n = \frac{4}{3} \quad n = 8$$

$$\underline{y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}} \quad \underline{y = -x + 8}$$

$$4. \quad \frac{1}{3}x + \frac{4}{3} = -x + 8$$

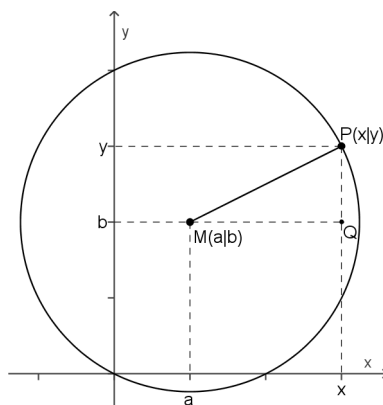
$$\underline{x = 5}$$

$$\underline{y = -5 + 8 = 3} \quad \underline{M(5|3)}$$

$$5. \quad \underline{\underline{\overline{AM} = 5 = r}}$$

## 1.9 Der Kreis

Ein Kreis ist der geometrische Ort aller Punkte  $P$  der Ebene, die von einem festen Punkt  $M$  den gleichen Abstand  $r$  besitzen.



Es gilt der Satz des Pythagoras:

$$\overline{MQ}^2 + \overline{PQ}^2 = \overline{MP}^2$$

Daraus folgt die allgemeine Kreisgleichung mit dem Mittelpunkt  $M(a|b)$ .

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \tag{1.12}$$

Für einen Kreis mit dem Mittelpunkt  $M(0|0)$  im Ursprung gilt:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

### 1.9.1 Punkt - Kreis

Beispiel 1:

$$k : (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 25 \quad P(2|5)$$

Durch Einsetzen erhält man:

$$(2 - 1)^2 + (5 - 3)^2 = 25$$

$$5 \neq 25 \Rightarrow P \notin k$$

Da  $5 < 25$ , folgt weiter: P liegt im Kreis k.

Beispiel 2:

$$k : x^2 + y^2 = 25 \quad P(3|4)$$

$$9 + 16 = 25$$

$$25 = 25 \Rightarrow P \text{ liegt auf dem Kreis } k.$$

### 1.9.2 Gerade - Kreis

Beispiel:

$$k : (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 40 \quad g : y = -x + 9$$

Durch Einsetzen der Geradengleichung in die Kreisgleichung erhält man:

$$(x - 3)^2 + (-x + 7)^2 = 40$$

$$2x^2 - 20x + 18 = 0$$

$$x_1 = 9$$

$$x_2 = 1$$

Es ergeben sich zwei Lösungen. Das bedeutet, dass es zwischen dem Kreis  $k$  und der Geraden  $g$  zwei Schnittpunkte gibt. Also ist die Gerade  $g$  eine Sekante des Kreises  $k$ .

### 1.9.3 Kreis - Kreis

Beispiel:

$$k_1 : (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 13$$

$$k_2 : (x + 1)^2 + (y + 12)^2 = 169$$

Durch Ausmultiplizieren der Klammern und Subtrahieren der Gleichung des Kreises  $k_1$  von der Gleichung des Kreises  $k_2$  erhält man die Gleichung der Geraden  $g$ , welche durch die beiden Schnittpunkte der Kreise verläuft:

$$g : 15y - 12 = x$$

Durch Einsetzen der Geradengleichung in eine der Kreisgleichungen erhält man analog zum Abschnitt 1.9.2 die Schnittpunkte der beiden Kreise:

$$(15y - 10)^2 + (y - 3)^2 = 13$$

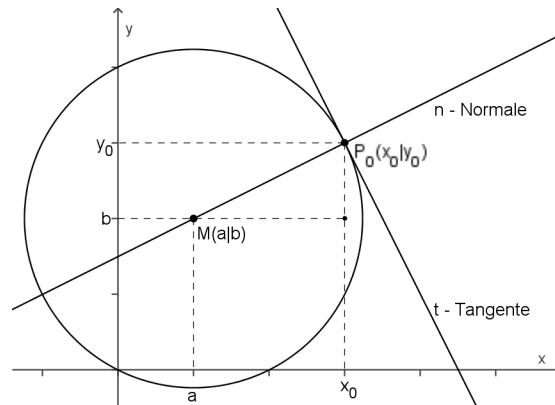
$$226y^2 - 306y + 96 = 0$$

$$y_1 \approx 0,86$$

$$y_2 \approx 0,46$$

$$\underline{\underline{S_1(0,9|0,86)}} \quad \underline{\underline{S_2(-4,65|0,49)}}$$

### 1.9.4 Tangente an den Kreis durch einen Berührungspunkt



Für die Normale  $n$  gilt:

$$m_n = \frac{y_0 - b}{x_0 - a}$$

Die Tangente  $t$  liegt senkrecht zur Normale und es gilt:

$$m_t = -\frac{x_0 - a}{y_0 - b}$$

Aus der Punktgleichung (siehe Abschnitt 1.6.3) folgt die Tangentengleichung:

$$\begin{aligned} t: \quad y - y_0 &= -\frac{x_0 - a}{y_0 - b} \cdot (x - x_0) \\ &\vdots \\ 0 &= x_0x - x_0^2 - ax + ax_0 + y_0y - yb - y_0^2 + y_0b \quad (1) \end{aligned}$$

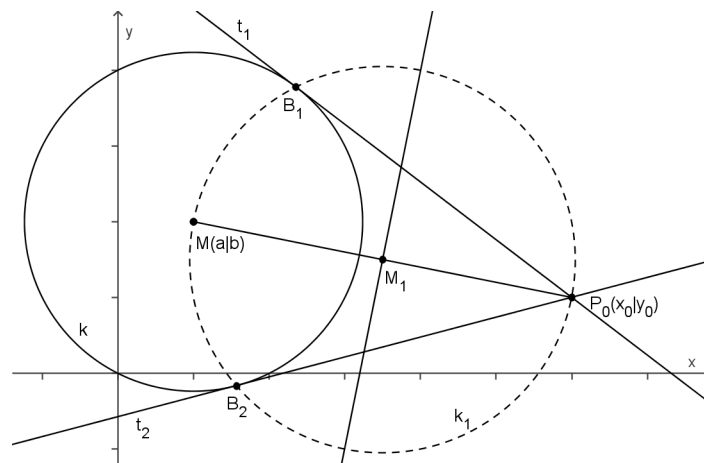
Da der Punkt  $P_0$  auf dem Kreis liegt, muss er auch die Kreisgleichung erfüllen:

$$\begin{aligned} r^2 &= (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 \\ r^2 &= x_0^2 - 2ax_0 + a^2 + y_0^2 - 2y_0b + b^2 \quad (2) \end{aligned}$$

Durch Addition von Gleichung (1) und (2) und anschließendes mehrfaches Ausklammern ergibt sich die Gleichung der Tangente an den Kreis im Berührungspunkt:

$$(x - a)(x_0 - a) + (y - b)(y_0 - b) = r^2 \quad (1.13)$$

### 1.9.5 Tangenten an einen Kreis von einem Punkt außerhalb



Beispiel:

$$k: (x + 2)^2 + y^2 = 5 \quad P(3|5)$$

1. Mittelpunkt  $M_1$  von  $\overline{MP_0}$  bestimmen.  $\overline{MM_1}$  ist der Radius  $r$  vom Kreis  $k_1$ .

$$M_1(0,5|2,5)$$

$$r = \overline{MM_1} = \sqrt{6,25 + 6,25} = \sqrt{12,5}$$

$$k_1: (x - 0,5)^2 + (y - 2,5)^2 = 12,5$$

2. Schnittpunkte von  $k$  und  $k_1$  bestimmen. Dies sind die Berührungspunkte der Tangenten an den Kreis  $k$ .

Durch Subtrahieren der Kreisgleichungen ergibt sich die Geradengleichung  $g$ :

$$g: x = -y - 1$$

3. Durch Einsetzen in die Kreisgleichung  $k$  ergeben sich die Schnittpunkte:

$$B_1(-3|2) \quad B_2(0|1)$$

4. Bestimmen der Tangentengleichungen:

$$m_{t_1} = \frac{5-2}{3+3} = \frac{1}{2}$$

$$5 = \frac{1}{2} \cdot 3 + n \quad \rightarrow n = 3,5$$

$$t_1 : \underline{\underline{y = \frac{1}{2}x + 3,5}}$$

$$m_{t_2} = \frac{5+1}{3-0} = 2$$

$$5 = 2 \cdot 3 + n \quad \rightarrow n = -1$$

$$t_2 : \underline{\underline{y = 2x - 1}}$$

## 2 Lineare Gleichungssysteme LGS

### 2.1 Zwei Variablen und zwei Gleichungen

$$\begin{array}{rclcrcl} a_1x & + & a_2y & = & a & & | \cdot b_2 & | \\ b_1x & + & b_2y & = & b & & | \cdot (-a_2) & \downarrow - \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcrcl} a_1b_2x & - & a_2b_1x & = & ab_2 & - & a_2b \\ x(a_1b_2 & - & a_2b_1) & = & ab_2 & - & a_2b \quad (*) \end{array}$$

$$x = \frac{ab_2 - a_2b}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$\begin{array}{rclcrcl} a_1x & + & a_2y & = & a & & | \cdot b_1 & | \\ b_1x & + & b_2y & = & b & & | \cdot (-a_1) & \downarrow + \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcrcl} a_2b_1y & - & a_1b_2y & = & ab_1 & - & a_1b \\ y(a_2b_1 & - & a_1b_2) & = & ab_1 & - & a_1b \quad (*) \end{array}$$

$$y = \frac{ab_1 - a_1b}{a_2b_1 - a_1b_2}$$

$$\underline{\underline{L = \left\{ \left( \frac{ab_2 - a_2b}{a_1b_2 - a_2b_1} \mid \frac{ab_1 - a_1b}{a_2b_1 - a_1b_2} \right) \right\}}} \quad (2.1)$$

Anzahl der Lösungen:

- genau eine Lösung, wenn gilt:

$$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$$

- keine Lösung, wenn gilt:

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \quad \text{und} \quad ab_2 - a_2b \neq 0 \quad (\text{bzw. } ab_1 - a_1b \neq 0)$$

- unendlich viele Lösungen, wenn gilt:

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \quad \text{und} \quad ab_2 - a_2b = 0 \quad (\text{bzw. } ab_1 - a_1b = 0)$$

Diese Aussagen folgen aus den Gleichungen, die mit (\*) gekennzeichnet sind.

## 2.2 Lösung mit Determinanten

Eine Determinante ist ein quadratisches Schema, in das die Koeffizienten bzw. die rechten Seiten der Gleichungen eingetragen werden.

Koeffizientendeterminante:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = D \quad (2.2)$$

Die Determinante ist das Produkt der Hauptdiagonalen einer Matrix minus das Produkt der Nebendiagonalen.

Determinante zur Berechnung der  $x$ -Koordinate:

$$D_x = \begin{vmatrix} a & a_2 \\ b & b_2 \end{vmatrix} = a b_2 - a_2 b$$

Determinante zur Berechnung der  $y$ -Koordinate:

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & a \\ b_1 & b \end{vmatrix} = a_1 b - a b_1$$

$$x = \frac{D_x}{D} \quad y = \frac{D_y}{D} \quad (\text{Cramer'sche Regel}) \quad (2.3)$$

Das LGS ist eindeutig lösbar, wenn  $D \neq 0$ .

Eigenschaften einer Determinante:

- Die Determinante ist linear in jeder Zeile.
- Beim Vertauschen zweier Zeilen ändert die Determinante ihr Vorzeichen.
- Die Determinante ändert ihren Wert nicht beim Vertauschen der Zeilen mit den Spalten.
- Die Determinante hat den Wert 0, wenn eine Zeile eine Linearkombination anderer Zeilen ist, das heißt speziell, wenn eine Zeile nur aus Nullen besteht, oder wenn zwei Zeilen gleich sind.
- Die Determinante ändert ihren Wert nicht, wenn man zu einer Zeile Linearkombinationen anderer Zeilen addiert.

## 2.3 Drei Variablen und drei Gleichungen

Beispiel:

$$\begin{array}{rclclcl} x & + & y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 4y & + & 3z & = & 9 \\ & & 4y & + & 4z & = & 8 \end{array}$$

---

Lösung mit dreireihigen Determinanten:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 0 + 8 - 0 - 10 - 8 = 4$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 9 & 4 & 3 \\ 8 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 48 + 24 + 36 - 32 - 36 - 36 = 4$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 9 & 3 \\ 0 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 36 + 0 + 16 - 0 - 24 - 24 = 4$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \\ 0 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 32 + 0 + 24 - 0 - 36 - 16 = 4$$

$$\underline{\underline{L = \{(1|1|1)\}}}$$

## 2.4 Gauß'sches Eliminationsverfahren

Man löst ein LGS, indem man durch Anwenden von Äquivalenzumformungen die Trepezgestalt erzeugt.

Äquivalenzumformungen sind:

- Vertauschen von Zeilen
- Multiplizieren und Dividieren einzelner Zeilen mit einer von 0 verschiedenen Zahl
- Addieren und Subtrahieren einzelner Zeilen

Beispiel:

$$\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ 4x - 2y + z = 8 \\ \hline x - y + z = 4 \end{array}$$

Aus den Koeffizienten ergibt sich folgendes:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 & 8 \\ \hline 1 & -1 & 1 & 4 \end{array}$$

Durch Multiplikation der ersten Zeile mit  $(-4)$  und anschließender Addition zur zweiten Zeile und Multiplikation der ersten Zeile mit  $(-1)$  und anschließender Addition zur dritten Zeile ergibt sich:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -3 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 0 & 2 \end{array}$$

Aus der dritten Zeile ist nun ablesbar, dass:

$$y = -1$$

Setzt man dies nun in die zweite Zeile ein, ergibt sich für  $z$ :

$$z = 2$$

Somit ergibt sich für  $x$ :

$$x = 1$$

$$\underline{\underline{L = \{1 | -1 | 2\}}}$$

## 2.5 Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem hat entweder genau eine, keine oder unendliche viele Lösungen.

Beispiel 1:

$$\begin{array}{rccccrcr} 2x & - & 4y & + & z & = & -3 \\ 4x & - & 8y & + & 2z & = & -6 \\ \hline x & + & 6y & - & 4z & = & 0 \end{array}$$

Aus den Koeffizienten ergibt sich:

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 1 & -3 \\ 4 & -8 & 2 & -6 \\ \hline 1 & 6 & -4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & -4 & 0 \end{array}$$

Die vierte Zeile ergibt sich aus Multiplikation der ersten Zeile mit  $(-2)$  und anschließender Addition zur zweiten Zeile. Aus der vierten Zeile folgt, dass es unendlich viele Lösungen gibt.

Beispiel 2:

$$\begin{array}{rccccrcr} 5x & - & y & + & z & = & 8 \\ -2x & + & 3y & + & z & = & 2 \\ \hline 6x & + & 4y & & & = & 20 \end{array}$$

Aus den Koeffizienten ergibt sich:

$$\begin{array}{ccc|c}
 5 & -1 & 1 & 8 \\
 -2 & 3 & 1 & 2 \\
 \hline
 6 & 4 & 0 & 20 \\
 \\ 
 -7 & 4 & 0 & -6 \\
 6 & 4 & 0 & 20 \\
 \hline
 13 & 0 & 0 & 26
 \end{array}$$

Die vierte Zeile ergibt sich aus Multiplikation der ersten Zeile mit  $(-1)$  und anschließender Addition zur zweiten Zeile. Multipliziert man diese ein weiteres mal mit  $(-1)$  und addiert diese zur fünften Zeile so erhält man die sechste Zeile. Aus dieser ist zu schließen, dass es genau eine Lösung gibt.

Beispiel 3:

$$\begin{array}{rclcl}
 5x & - & y & + & z & = & 8 \\
 -2x & + & 3y & + & z & = & 2 \\
 \hline
 6x & + & 4y & + & 4z & = & 10
 \end{array}$$

Aus den Koeffizienten ergibt sich:

$$\begin{array}{ccc|c}
 5 & -1 & 1 & 8 \\
 -2 & 3 & 1 & 2 \\
 \hline
 6 & 4 & 4 & 10 \\
 \\ 
 -7 & 4 & 0 & -6 \\
 6 & 4 & 0 & 10 \\
 \hline
 13 & 0 & 4 & 16
 \end{array}$$

Das Vorgehen ist hier das gleiche wie in Beispiel 2. Aus der letzten Zeile ist nun zu schließen, dass es keine Lösung gibt.

## 2.6 Lösungsmenge bei LGS mit unendlich vielen Lösungen

Beispiel:

$$\begin{array}{r} x - y + z = 4 \quad (**) \\ 2x + y - 3z = 7 \\ \hline x + 5y - 9z = 2 \end{array}$$

Aus den Koeffizienten ergibt sich:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -3 & 7 \\ \hline 1 & 5 & -9 & 2 \\ \hline 0 & 3 & -5 & -1 \quad (*) \\ \hline 0 & 6 & -10 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Die vierte Zeile ergibt sich aus Multiplikation der ersten Zeile mit  $(-2)$  und anschließender Addition zur zweiten Zeile. Die fünfte Zeile ergibt sich aus Multiplikation der ersten Zeile mit  $(-1)$  und anschließender Addition zur dritten Zeile. Multipliziert man die vierte Zeile mit  $(-2)$  und addiert sie anschließend zur fünften Zeile so ergibt sich die sechste Zeile, aus der ersichtlich wird, dass das LGS unendlich viele Lösungen besitzt.

Aus der mit  $(*)$  markierten Zeile folgt:

$$3y - 5z = -1$$

Für eine der beiden Variablen wählt man einen Parameter:

$$z = t$$

Die Gleichung wird anschließend nach der verbleibenden Variablen umgestellt:

$$y = \frac{5}{3}t - \frac{1}{3}$$

Aus der mit (\*\*) markierten Gleichung folgt:

$$x - \left(\frac{5}{3}t - \frac{1}{3}\right) + t = 4$$

Für  $x$  ergibt sich:

$$x = \frac{2}{3}t + \frac{11}{3}$$

$$L = \left\{ \left( \frac{2}{3}t + \frac{11}{3} \mid \frac{5}{3}t - \frac{1}{3} \mid t \right) \right\} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Oder:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{11}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

## 2.7 Homogene und inhomogene LGS

Ein LGS heißt homogen, wenn die „rechten Seiten“ nur aus Nullen bestehen. Andernfalls heißt es inhomogen.

Beispiel:

homogen:

$$\begin{array}{rclcl} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & 2y & - & 3z & = & 0 \\ 3x & & & - & 2z & = & 0 \end{array}$$

inhomogen:

$$\begin{array}{rclcl} x & - & 2y & + & z & = & 4 \\ 2x & + & 2y & - & 3z & = & -3 \\ 3x & & & - & 2z & = & 1 \end{array}$$

Ein homogenes LGS hat stets die triviale Lösung:

$$x = y = z = 0$$

Hat ein homogenes LGS unendlich viele Lösungen, so erhält man die Lösung des zugehörigen inhomogenen LGS, indem man zu den Lösungen des homogenen eine spezielle Lösung des inhomogenen LGS addiert.

im Beispiel:

homogen:

$$\underline{\underline{L = \left\{ \left( \frac{2}{3}t \mid \frac{5}{6}t \mid t \right) \right\}}}$$

inhomogen:

$$\text{spezielle Lsg.: } \left( \frac{1}{3} \mid -\frac{11}{3} \mid 0 \right)$$

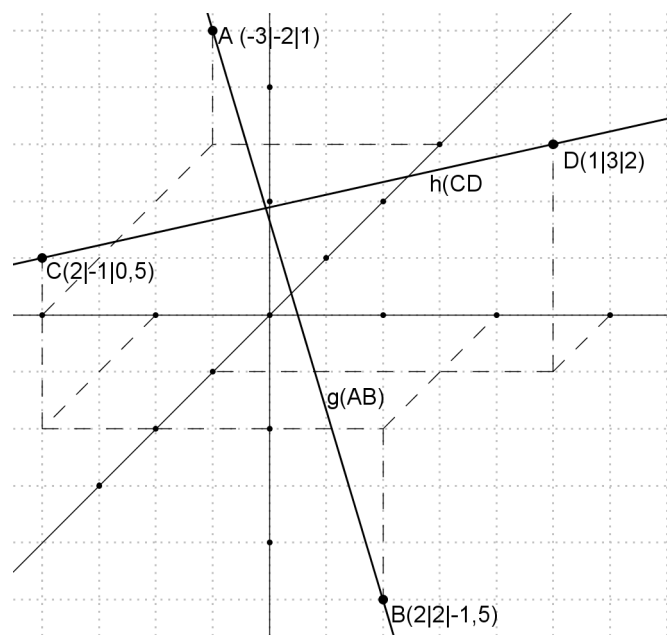
$$\underline{\underline{L = \left\{ \left( \frac{2}{3}t + \frac{1}{3} \mid \frac{5}{6}t - \frac{11}{3} \mid t \right) \right\}}}$$

- Besitzt das homogene LGS nur die triviale Lösung, so ist auch ein zugehöriges inhomogenes LGS stets eindeutig lösbar.
- Besitzt ein homogenes LGS mehr Variablen als Gleichungen, so hat es entweder keine oder unendlich viele Lösungen.

### 3 Koordinatengeometrie im Raum

#### 3.1 Das räumliche kartesische Koordinatensystem

- besteht aus drei Zahlengeraden, die:
    - sich im Nullpunkt jeder Geraden schneiden (Koordinatenursprung).
    - paarweise senkrecht aufeinander stehen.
    - alle die gleiche Längeneinheit besitzen.
- Der Raum wird durch dieses Koordinatensystem in acht Oktanten zerlegt.
- Jeder Punkt erhält drei Koordinaten:  $P(x|y|z)$ .



Die Geraden g und h schneiden sich nicht.

#### 3.2 Strecken im Raum

Für die Länge der Strecke  $\overline{AB}$  mit  $A(x_A | y_A | z_A)$  und  $B(x_B | y_B | z_B)$  gilt analog zur Gleichung (1.1):

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \quad (3.1)$$

Die Strecke  $\overline{AB}$  mit  $A(x_A | y_A | z_A)$  und  $B(x_B | y_B | z_B)$  hat analog zu den Gleichungen (1.2) den Mittelpunkt:

$$M \left( \frac{x_A + x_B}{2} \mid \frac{y_A + y_B}{2} \mid \frac{z_A + z_B}{2} \right) \quad (3.2)$$

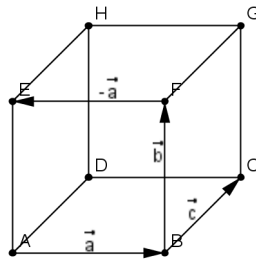
### 3.3 Vektoren

Definition:

Unter einem Vektor versteht man die Menge aller Verschiebungspfeile, die gleich lang, parallel und gleichgerichtet sind.

Bezeichnungen:

- mit Kleinbuchstaben:  $\vec{a}; \vec{b}; \vec{x}; \dots$
- mit Großbuchstaben:  $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{XY}; \dots$



$$\begin{aligned} \vec{a} &= \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG} \\ \vec{b} &= \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{CG} \\ \vec{c} &= \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG} \end{aligned}$$

Jeder Verschiebungspfeil ist ein Repräsentant des zugehörigen Vektors.

- Der Vektor  $-\vec{a}$  ist der zu  $\vec{a}$  entgegengesetzt gerichtete Vektor.

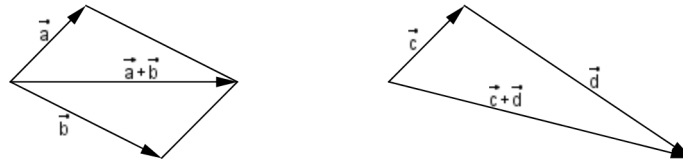
Es gilt:  $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

- Die Länge des Vektors  $\vec{a}$  nennt man Betrag von  $\vec{a} \dots |\vec{a}|$ .
- Der Betrag des Vektors  $\overrightarrow{AB}$  wird berechnet wie die Länge der Strecke  $\overline{AB}$ .

### 3.3.1 Addition von Vektoren

#### Definition:

Unter der Addition zweier Vektoren versteht man die nacheinander Ausführung der zugehörigen Verschiebungen. Das Ergebnis einer Addition ist wieder ein Vektor.



Im Beispiel des Quaders gilt somit:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \vec{a} + \vec{c} \\ \overrightarrow{BG} &= \vec{b} + \vec{c} \\ \overrightarrow{AG} &= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\end{aligned}$$

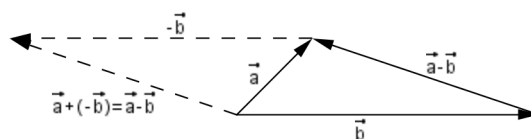
Für die Addition von Vektoren gelten folgende Rechengesetze:

1. Kommutativgesetz:  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
2. Assoziativgesetz:  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

### 3.3.2 Subtraktion von Vektoren

#### Definition:

Man subtrahiert einen Vektor  $\vec{b}$  von einem Vektor  $\vec{a}$ , indem man zum Vektor  $\vec{a}$  den entgegengesetzt gerichteten Vektor von  $\vec{b}$  addiert.



Die Summe aus einem Vektor  $\vec{a}$  und dem entgegengesetzt gerichteten Vektor  $-\vec{a}$  ist der Nullvektor.

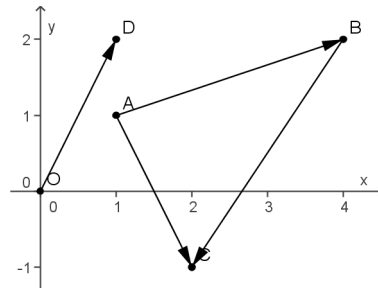
$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$$

Die zugehörige Abbildung heißt identische Abbildung.

Im Beispiel des Quaders gilt:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD} &= \vec{c} - \vec{a} \\ \overrightarrow{HA} &= -\vec{b} - \vec{c} \\ \overrightarrow{AG} &= \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}\end{aligned}$$

### 3.3.3 Rechnerische Addition und Subtraktion



$$A(1|1) \quad B(4|2) \quad C(2|-1) \quad D(1|2)$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vektoren mit dem Anfangspunkt  $O$  heißen Ortsvektoren. Deren Koordinaten stimmen mit den Koordinaten des Eckpunktes überein.

$$D(1|2) \Rightarrow \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Für die Berechnung eines beliebigen Vektors  $\overrightarrow{AB}$  mit  $A(x_A | y_A | z_A)$  und  $B(x_B | y_B | z_B)$  gilt:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  werden addiert/subtrahiert, indem die zugehörigen Koordinaten addiert/subtrahiert werden.

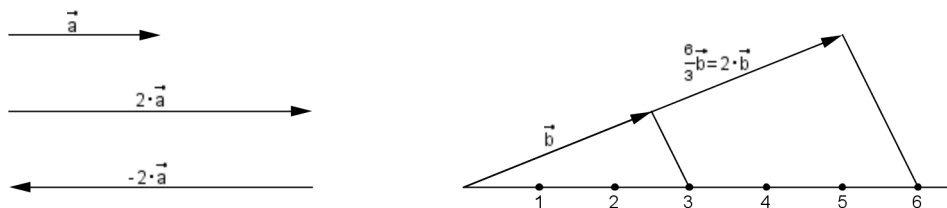
$$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \\ a_z \pm b_z \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

### 3.3.4 Vervielfachung von Vektoren

Definition:

Unter dem Produkt  $r \cdot \vec{a}$  ( $r \in \mathbb{R}$ ) versteht man einen Vektor mit folgenden Eigenschaften:

1. Wenn  $r > 0$ , so hat  $r \cdot \vec{a}$  die  $r$ -fache Länge von  $\vec{a}$  und ist zu  $\vec{a}$  gleich gerichtet.
2. Wenn  $r < 0$ , so hat  $r \cdot \vec{a}$  die  $r$ -fache Länge von  $\vec{a}$  und ist zu  $\vec{a}$  entgegengesetzt gerichtet.
3. Wenn  $r = 0$ , so ist  $r \cdot \vec{a} = \vec{0}$



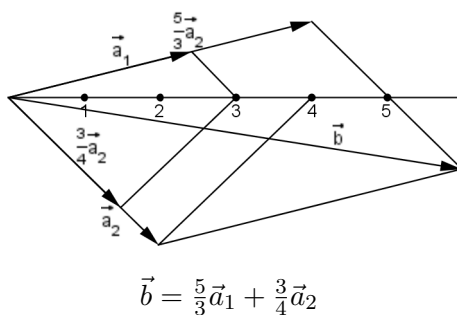
### 3.3.5 Linearkombinationen von Vektoren

Definition:

Der Vektor  $\vec{b}$  heißt Linearkombination der Vektoren  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n$ , wenn es reelle Zahlen  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$  gibt mit  $\vec{b} = r_1 \cdot \vec{a}_1 + r_2 \cdot \vec{a}_2 + r_3 \cdot \vec{a}_3 + \dots + r_n \cdot \vec{a}_n$ .

$r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$  - Koordinaten von  $\vec{b}$

$r_1\vec{a}_1, r_2\vec{a}_2, r_3\vec{a}_3, \dots, r_n\vec{a}_n$  - Komponenten von  $\vec{b}$



Für reelle Zahlen  $r$  und  $s$  und beliebige Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  gilt:

1.  $r(s\vec{a}) = (rs)\vec{a}$  (Assoziativgesetz)
2.  $(r+s)\vec{a} = r\vec{a} + s\vec{a}$  (Distributivgesetz)
3.  $r(\vec{a} + \vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b}$  (Distributivgesetz)

Zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  sind parallel zueinander, wenn es eine reelle Zahl  $r$  gibt mit  $r \cdot \vec{a} = \vec{b}$ .

Rechnerische Ermittlung von Linearkombinationen:

Man multipliziert einen Vektor mit einer reellen Zahl, indem man jede Koordinate mit dieser Zahl multipliziert.

$$r \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_x \\ r \cdot a_y \\ r \cdot a_z \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

$$r \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \pm s \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_x \pm s \cdot b_x \\ r \cdot a_y \pm s \cdot b_y \\ r \cdot a_z \pm s \cdot b_z \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Beispiel:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Die Aufgabe ist es, den Vektor  $\vec{c}$  als Linearkombination der Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  darzustellen.

$$r\vec{a} + s\vec{b} = \vec{c}$$
$$r \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \text{LGS :} & r - 2s & = -4 \\
 & 5r + 2s & = 16 \\
 & \underline{-3r + s} & \underline{= -3} \\
 & & \\
 & r & = 2 \\
 & s & = 3
 \end{array}$$

$$\underline{\underline{2\vec{a} + 3\vec{b} = \vec{c}}}$$

### 3.3.6 Lineare Un- und Abhängigkeit

Definition:

Die Vektoren  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n$  heißen linear abhängig, wenn sich mindestens einer dieser Vektoren als Linearkombination der anderen darstellen lässt. Lässt sich keiner der Vektoren  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n$  als Linearkombination der anderen darstellen, dann sind die Vektoren linear unabhängig.

In der Ebene:

- Zwei Vektoren sind linear abhängig, wenn sie parallel sind, andernfalls sind sie linear unabhängig.
- Die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  sind linear abhängig, wenn es eine reelle Zahl  $r$  gibt mit  $\vec{a} = r \cdot \vec{b}$ .
- Drei Vektoren sind stets linear abhängig.

Im Raum:

- zwei Vektoren (siehe Ebene)
- Drei Vektoren sind linear abhängig, wenn sie in einer Ebene liegen, andernfalls sind sie linear unabhängig. (→ Sie spannen einen Raum auf.)
- Die Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}$  und  $\vec{c}$  sind linear abhängig, wenn es reelle Zahlen  $r$  und  $s$  gibt mit  $r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} = \vec{c}$ .
- Vier Vektoren sind stets linear abhängig.

### 3.4 Basis und Koordinatensystem

#### Definition:

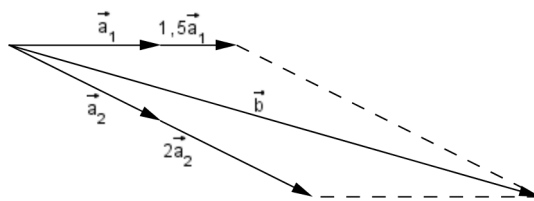
Sind  $\vec{a}_1$  und  $\vec{a}_2$  zwei beliebige linear unabhängige Vektoren der Ebene, so heißt die Menge  $\{\vec{a}_1; \vec{a}_2\}$  Basis der Vektoren der Ebene. In der Darstellung  $\vec{b} = r\vec{a}_1 + s\vec{a}_2$  heißen

- $r$  und  $s$  Koordinaten des Vektors  $\vec{b}$ .
- $r\vec{a}_1$  und  $s\vec{a}_2$  Komponenten des Vektors  $\vec{b}$  bezüglich der Basis  $\{\vec{a}_1; \vec{a}_2\}$ .

#### Analog:

- $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  sind linear unabhängige Vektoren des Raumes.
- $\{\vec{a}_1; \vec{a}_2; \vec{a}_3\}$  heißt Basis der Vektoren des Raumes.

#### Beispiel:



$\vec{a}_1$  und  $\vec{a}_2$  bilden eine Basis der Ebene, da  $\vec{a}_1 \nparallel \vec{a}_2$ .

Komponentendarstellung:  $\vec{b} = 1,5\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2$

Komponenten von  $\vec{b}$ :  $1,5\vec{a}_1; 2\vec{a}_2$

Koordinatendarstellung:  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Koordinaten von  $\vec{b}$ :  $1,5; 2$

#### Definition:

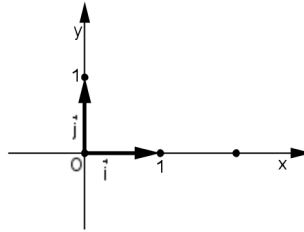
Ein Koordinatensystem der Ebene besteht aus einem festen Punkt  $O$  (Koordinatensprung) und einer Basis  $\{\vec{a}_1; \vec{a}_2\}$  der Ebene. Es erhält die Bezeichnung:  $(O; \vec{a}_1; \vec{a}_2)$ .

Analog dazu im Raum:  $(O; \vec{a}_1; \vec{a}_2; \vec{a}_3)$

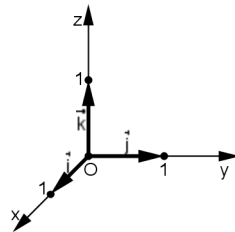
Im Beispiel bilden die Vektoren  $\vec{a}_1$  und  $\vec{a}_2$  mit dem gemeinsamen Punkt  $O$  ein Koordinatensystem der Ebene.

Vereinheitlichung:

1. in der Ebene:



2. im Raum:



Sind die Basisvektoren eines Koordinatensystems paarweise orthogonal zueinander und besitzen sie die Länge 1 (Einheitsvektoren), so handelt es sich um ein kartesisches Koordinatensystem. Die Basis bezeichnet man als orthonormiert.

### 3.4.1 Betrag eines Vektors

Der Vektor  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$  hat den Betrag:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (3.7)$$

## 3.5 Geraden in der Ebene und im Raum

### 3.5.1 Punktrichtungsgleichung

Satz:

Es sei  $P_0$  ein beliebiger Punkt der Ebene (des Raumes) und  $\vec{a}$  ein vom Nullvektor verschiedener Vektor der Ebene (des Raumes). Dann bilden alle Punkte  $P$  mit dem Ortsvektor

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{a} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (3.8)$$

eine Gerade der Ebene (des Raumes).

Bezeichnungen:

- $\vec{x}_0$  – Stützvektor der Geraden ( $\vec{x}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ )
- $\vec{a}$  – Richtungsvektor der Geraden
- $t$  – Parameter

Die Gleichung (3.8) ist eine Parametergleichung.

### 3.5.2 Zweipunkteform

Satz:

Es seien  $P_0$  und  $P_1$  zwei beliebige Punkte der Ebene (des Raumes). Dann bilden alle Punkte  $P$  mit

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + t(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (3.9)$$

eine Gerade.

### 3.5.3 Umwandlung parameterfreie Form - Parameterform

Beispiel 1:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\begin{array}{rcl} x & = & 1 - 2t \\ y & = & 2 + 5t \end{array}$$

$$\underline{\underline{5x + 2y = 9}}$$

Das Ergebnis ergibt sich durch Multiplikation der ersten Zeile mit 5 und der zweiten Zeile mit 2. Anschließend werden beide Zeilen miteinander addiert.

Die zweite Möglichkeit wäre:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow m = \frac{a_y}{a_x} = -\frac{5}{2}$$

Aus der Punkttrichtungsform (siehe Abschnitt 3.5.1) folgt:

$$y - 2 = -\frac{5}{2} \cdot (x - 1)$$
$$\underline{\underline{y = -\frac{5}{2}x + 4,5}}$$

Beispiel 2:

$$y = 3x - 7$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Allgemein gilt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (3.10)$$

Für eine Gerade im Raum gibt es keine parameterfreie Form.

### 3.5.4 Lagebeziehung Punkt - Gerade

Beispiel:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad P(2|3|-1)$$

Durch Einsetzen des Punktes  $P$  in die Geradengleichung  $g$  ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{t_x = t_y = t_z}_{\underline{P \in g}} = -1$$

### 3.5.5 Lagebeziehung Gerade - Gerade

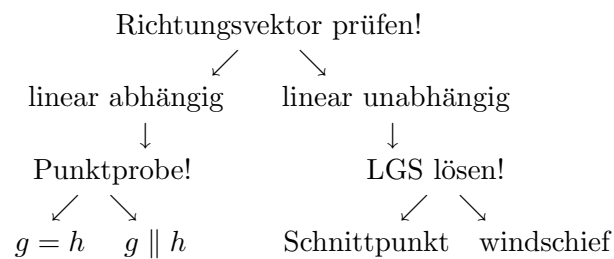
$$g : \vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{a} \quad h : \vec{x} = \vec{x}_1 + s\vec{b} \quad (s, t \in \mathbb{R})$$

Satz:

Die Geraden  $g$  und  $h$

1. besitzen einen Schnittpunkt, wenn die Gleichung  $\vec{x}_0 + t\vec{a} = \vec{x}_1 + s\vec{b}$  (\*) genau eine Lösung hat.
2. sind identisch, wenn die Gleichung (\*) unendlich viele Lösungen hat.
3. sind parallel, wenn die Gleichung (\*) keine Lösung hat und die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  linear abhängig sind.
4. sind windschief, wenn die Gleichung (\*) keine Lösung hat und die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  linear unabhängig sind.

Rechnerische Lösung:



## 3.6 Ebenen im Raum

### 3.6.1 Punktrichtungsform

Satz:

Sind  $P_0$  ein beliebiger Punkt des Raumes mit dem Ortsvektor  $\vec{x}_0$  und  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  zwei linear unabhängige Vektoren des Raumes, so bilden alle Punkte  $P$  mit

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + r\vec{a} + s\vec{b} \quad (r, s \in \mathbb{R}) \quad (3.11)$$

eine Ebene.

$\vec{a}, \vec{b}$  - Spannvektoren

### 3.6.2 Dreipunkteform

Satz:

Sind die Punkte  $P_0, P_1, P_2$  Punkte des Raumes mit den Ortsvektoren  $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2$ , so bilden alle Punkte  $P$  mit

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + r(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) + s(\vec{x}_2 - \vec{x}_0) \quad (r, s \in \mathbb{R}) \quad (3.12)$$

eine Ebene.

### 3.6.3 Ermittlung einer parameterfreien Ebenengleichung

Beispiel:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (r, s \in \mathbb{R})$$

LGS:

$$\begin{array}{rcl} x & = & 2 + r + 2s \\ y & = & 1 - 2r + 4s \\ z & = & 4 + 3r - 2s \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} -2x + y & = & -3 - 4r \\ x + z & = & 6 + 4r \end{array}$$

$$\underline{\underline{z - x + y = 3}}$$

Durch Multiplikation der ersten Zeile mit  $(-2)$  und anschließender Addition zur zweiten und dritten Zeile ergeben sich Zeile vier und fünf. Durch weitere Addition dieser beiden Zeilen ergibt sich die parameterfreie Ebenengleichung.

Satz:

Eine Gleichung der Form  $Ax + By + Cz = D$  beschreibt eine Ebene, wenn  $A, B$ , und  $C$  nicht gleichzeitig Null sind.

Der Vektor  $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$  heißt Normalenvektor und steht senkrecht auf der Ebene.

### 3.6.4 Lagebeziehung Punkt - Ebene

Beispiel 1:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad P(-1|1|1)$$

Eingesetzt:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl} -3 & = & -6r - 5s \\ -4 & = & 3r - 3s \\ 4 & = & 6r + 6s \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} r & = & -\frac{1}{3} \\ s & = & 1 \end{array}$$

Es existiert genau eine Lösung  $\rightarrow \underline{\underline{P \in E}}$

Beispiel 2:

$$2x + y - 3z = 8 \quad P(-2|3|1)$$

Eingesetzt:

$$\begin{array}{rcl} -4 + 3 - 3 & = & 8 \\ -4 \neq 8 & \rightarrow & \underline{\underline{P \notin E}} \end{array}$$

### 3.6.5 Lagebeziehung Gerade - Ebene

#### 1. Sonderfall Gerade - Koordinatenebene

Beispiel:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad x - y - \text{Ebene}$$

Ein Punkt in der  $x - y$ -Ebene hat die  $z$ -Koordinate Null:

$$0 = 2 - 3t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2}{3}$$

$$x = 3 + \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{11}{3}$$

$$y = 1 + \frac{2}{3}(-2) = -\frac{1}{3}$$

$$\underline{\underline{D_{xy} \left( \frac{11}{3} \mid -\frac{1}{3} \mid 0 \right)}}$$

$D_{xy}$  ist der Durchstoßpunkt der Geraden  $g$  durch die  $x - y$ -Ebene.

#### 2. Sonderfall Ebene - Koordinatenachse

Beispiel:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad x - \text{Achse}$$

Auf der  $x$ -Achse sind die  $y$ - und  $z$ -Koordinate gleich Null:

$$\begin{array}{r} 0 = 2 - r + 3s \\ 0 = 4 - r + 2s \end{array}$$

---

$$r = 8$$

$$s = 2$$

$$x = 1 + 8 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 19$$

$$\underline{\underline{P_x(19|0|0)}}$$

### 3. Allgemein

$$g: \vec{x} = \vec{x}_0 + r\vec{a} \quad E: \vec{x} = \vec{x}_1 + s\vec{b} + t\vec{c} \quad (r, s, t \in \mathbb{R})$$

Mögliche Fälle:

- $g$  und  $E$  besitzen einen Schnittpunkt, wenn das LGS  $\vec{x}_0 + r\vec{a} = \vec{x}_1 + s\vec{b} + t\vec{c}$  genau eine Lösung hat.
- $g \parallel E$ , wenn dieses LGS keine Lösung hat.
- $g$  liegt in  $E$ , wenn dieses LGS unendlich viele Lösungen hat.

Beispiel:

$$E: z - 3y - 7x = -9 \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1,5 \end{pmatrix}$$

Nach Einsetzen der Geradengleichung:

$$\begin{aligned} -7(3+r) - 3(4+r) + 1 - 1,5r &= -9 \\ -21 - 7r - 12 - 3r + 1 - 1,5r &= -9 \\ -11,5r &= 23 \\ r &= -2 \end{aligned}$$

genau eine Lösung  $\rightarrow$  Schnittpunkt

#### 3.6.6 Lagebeziehung Ebene - Ebene

$$E_1: \vec{x} = \vec{x}_0 + r\vec{a} + s\vec{b} \quad (r, s \in \mathbb{R})$$

$$E_2: \vec{x} = \vec{x}_1 + t\vec{c} + u\vec{d} \quad (t, u \in \mathbb{R})$$

Mögliche Lagebeziehungen:

- $E_1 \parallel E_2$ , wenn die Gleichung  $\vec{x}_0 + r\vec{a} + s\vec{b} = \vec{x}_1 + t\vec{c} + u\vec{d}$  keine Lösung hat.
- $E_1 = E_2$  oder  $E_1$  und  $E_2$  besitzen eine gemeinsame Schnittgerade, wenn die Gleichung unendlich viele Lösungen hat.

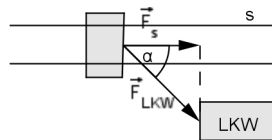
Es gibt drei Möglichkeiten zur Lösung des Problems:

1. Die Parameterformen der Ebenengleichungen gleichsetzen.
2. Eine Ebenengleichung in die parameterfreie Form überführen und die zweite in diese einsetzen.
3. Beide Gleichungen in parameterfreie Form bringen und das LGS lösen.

### 3.7 Das Skalarprodukt

Ich beginne mit einem Beispiel aus der Physik:

Ein Güterwaggon soll von einem LKW gezogen werden. Der LKW muss neben den Gleisen fahren (siehe Abbildung).



$$W = |\vec{F}_s| \cdot |\vec{s}|$$

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{F}_s|}{|\vec{F}_{LKW}|} \quad \rightarrow \quad |\vec{F}_s| = |\vec{F}_{LKW}| \cdot \cos(\alpha)$$

$$W = \underbrace{|\vec{F}_{LKW}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos(\alpha)}_{\text{Skalarprodukt der Vektoren } \vec{F}_{LKW} \text{ und } \vec{s} \quad (\vec{F}_{LKW} \cdot \vec{s})}$$

Definition:

Sind  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  beliebige Vektoren, so ist  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  gleich  $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$  das Skalarprodukt der Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ .

Rechengesetze für Skalarprodukte:

$\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  sind beliebige Vektoren,  $t \in \mathbb{R}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

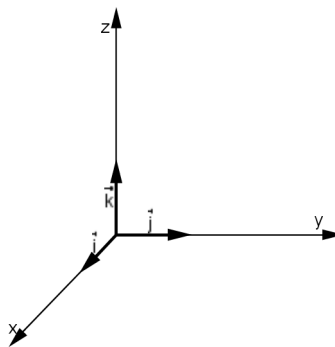
$$\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$$

$$t(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (t\vec{a}) \cdot \vec{b}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 \geq 0$$

Weiter gilt:  $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

### 3.7.1 Berechnung des Skalarprodukts aus den Koordinaten der Vektoren



$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$$

$$\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}) \cdot (b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \underbrace{a_x b_x \cdot \vec{i}^2}_{a_x b_x \cdot 1} + \underbrace{a_x b_y \cdot \vec{i} \vec{j}}_0 + \underbrace{a_x b_z \cdot \vec{i} \vec{k}}_0 + \dots + \underbrace{a_z b_z \cdot \vec{k}^2}_{a_z b_z \cdot 1}$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1 \quad (|\vec{i}| = 1, \sphericalangle = 0, \cos \sphericalangle = 1)$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \quad (|\vec{i}| \cdot |\vec{j}| = 1, \sphericalangle = 90^\circ, \cos \sphericalangle = 0)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (3.13)$$

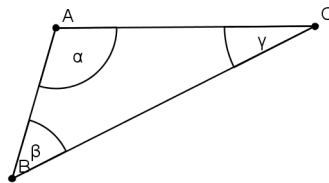
### 3.7.2 Winkelberechnungen

1. Winkel zwischen Vektoren

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$$

$$\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \quad (3.14)$$

2. Winkel in Figuren



Es gilt:

$$\alpha = \sphericalangle(\vec{AB}; \vec{AC})$$

$$\beta = \sphericalangle(\vec{BA}; \vec{BC})$$

$$\gamma = \sphericalangle(\vec{CA}; \vec{CB})$$

### 3. Schnittwinkel von Geraden

$$g: \vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{a} \quad h: \vec{x} = \vec{x}_1 + s\vec{b} \quad (s, t \in \mathbb{R})$$

Als Schnittwinkel zwischen  $g$  und  $h$  gilt der Winkel  $\alpha$ , für den gilt:  $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ .

Für die Berechnung des Schnittwinkels verwendet man die Richtungsvektoren.

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

### 4. Normalenvektor einer Ebene bestimmen

Beispiel:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (r, s \in \mathbb{R})$$

Da der Normalenvektor  $\vec{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  senkrecht auf der Ebene steht, muss gelten:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

LGS:

$$\begin{array}{rcl} -x & + & 2y & - & 3z & = & 0 \\ 3x & + & 4y & - & 2z & = & 0 \end{array}$$

---

$$10y - 11z = 0$$

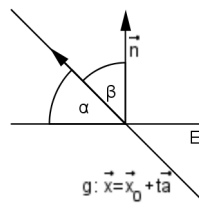
$$z = t$$

$$y = 1,1t$$

$$x = -0,8t$$

Jeder Vektor  $\vec{n}_t = t \cdot \begin{pmatrix} -0,8 \\ 1,1 \\ 1 \end{pmatrix}$  ist senkrecht zur Ebene  $E$ .

### 5. Schnittwinkel zwischen Geraden und Ebene



Es gilt:

$$\cos(\beta) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|}$$

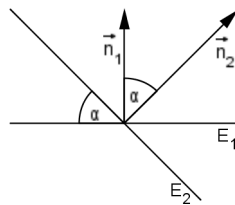
$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\alpha = 90^\circ - \beta$$

$$\cos(\beta) = \sin(\alpha)$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|} \quad (3.15)$$

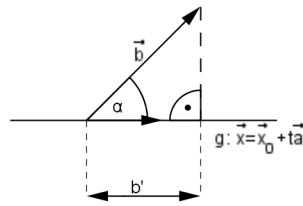
### 6. Schnittwinkel von zwei Ebenen



Der Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen entspricht dem Schnittwinkel zwischen den Normalenvektoren.

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \quad (3.16)$$

### 3.7.3 Länge der senkrechten Projektion eines Vektors



$b'$  ... vorzeichenbehaftete Länge der Projektion des Vektors  $\vec{b}$  auf  $g$

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

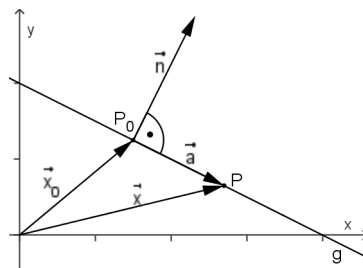
Im rechtwinkligen Dreieck gilt:  $\cos(\alpha) = \frac{b'}{|\vec{b}|}$ .

$$\frac{b'}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$b' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} \quad (3.17)$$

## 3.8 Hessesche Normalenform der Geraden- und Ebenengleichung

1. Gerade in der Ebene



$$g: ax + by = c$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \perp g$$

Es gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$$

$$(\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \vec{n} = 0$$

Durch Ersetzen des Normalenvektors  $\vec{n}$  durch einen Normalenvektor mit der Länge 1 (Normaleneinheitsvektor  $\vec{n}^0$ ) entsteht die Hessesche Normalenform:

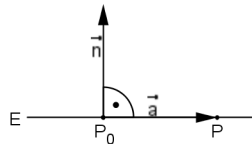
$$\vec{n}^0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

$$(\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = 0 \quad (3.18)$$

Mit  $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$  ergibt sich für die Koordinatendarstellung:

$$\frac{Ax + By - C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0 \quad (3.19)$$

## 2. Ebene im Raum



Es sei  $P_0$  ein fester Punkt in  $E$  und  $P$  ein beliebiger Punkt  $E$ , wobei  $\vec{x}_0$  und  $\vec{x}$  die Ortsvektoren von  $P_0$  und  $P$  sind und  $\vec{a} = \overrightarrow{P_0P}$ .  $\vec{n}$  sei der Normalenvektor der Ebene  $E$ .

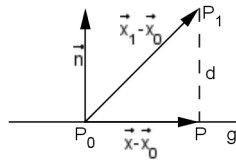
Für die Ebene im Raum gilt wie auch für die Gerade in der Ebene die Gleichung (3.18).

Mit  $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$  ergibt sich für die Koordinatendarstellung:

$$\frac{Ax + By + C - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0 \quad (3.20)$$

### 3.9 Abstandsberechnungen

#### 3.9.1 Abstand Punkt - Gerade in der Ebene (Punkt - Ebene im Raum)



$$(\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = 0$$

Ersetzt man auf der linken Seite den Ortsvektor von  $P$  durch den Ortsvektor von  $P_1$ , so entspricht der Wert des Terms der Länge  $d$  der senkrechten Projektion des Vektors  $\vec{x}_1 - \vec{x}_0$  auf den Vektor  $\vec{n}$ .  $\rightarrow$  Abstand  $P_1$  zu  $g$

Es gilt:

$$d = \left| (\vec{x}_1 - \vec{x}_0) \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \right| \quad (3.21)$$

Oder in Koordinatendarstellung:

$$d = \left| \frac{Ax + By + Cz - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| \quad (3.22)$$

Mit der Gleichung (3.21) sind folgende Abstände lösbar:

1. Abstand paralleler Geraden in der Ebene. Man bestimmt den Abstand eines Punktes einer Geraden zur anderen Geraden.
2. Abstand paralleler Ebenen. Man bestimmt den Abstand eines Punktes einer Ebene zur anderen Ebene.
3. Abstand einer Geraden zu einer parallelen Ebene. Man bestimmt den Abstand eines Punktes der Geraden zur Ebene.

#### 3.9.2 Abstand windschiefer Geraden

1. Aufstellen der Gleichung einer Ebene, die die eine Gerade enthält und parallel zu der anderen verläuft.
2. Bestimmung des Abstandes eines Punktes der Geraden zur Ebene.

### 3.9.3 Abstand Punkt - Gerade im Raum

1. Aufstellen der Gleichung einer Ebene, die senkrecht zur Geraden verläuft und den Punkt  $P$  enthält.
2. Durchstoßpunkt  $D$  von Gerade und Ebene bestimmen.
3. Länge der Strecke  $\overline{PD}$  berechnen.

### 3.9.4 Abstand paralleler Geraden im Raum

Man wählt einen Punkt auf einer der beiden Geraden und berechnet dessen Abstand zur anderen Geraden (siehe Abschnitt 3.9.3).

## 3.10 Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{i}(a_y b_z - a_z b_y) + \vec{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Das Vektorprodukt der Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  entspricht einem Vektor  $\vec{n}$ , der senkrecht auf der von den Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannten Ebene steht.

$$E : \quad \vec{x} = \vec{x}_0 + r\vec{a} + s\vec{b}$$

$$\rightarrow \quad \vec{n}_E = \vec{a} \times \vec{b}$$