Analysis 2

www.schulmathe.npage.de

Aufgaben

1. Gegeben ist die Funktion f durch

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 6x + 5}$$

   a) Ermitteln Sie den Definitionsbereich der Funktion f.

   Weisen Sie nach, dass gilt:

$$f'(x) = \frac{-6(x-3)}{\left(x^2 - 6x + 5\right)^2}$$

   Untersuchen Sie den Graphen von f auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und lokale Extrempunkte.

   Ermitteln Sie gegebenenfalls deren Koordinaten sowie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen der Funktion f.

   Skizzieren Sie den Graphen von f und die Asymptoten im Intervall $-2 \leq x \leq 8$.

   b) Im Punkt $P\big(0|f(0)\big)$ wird die Tangente t an den Graphen von f gelegt. Geben Sie die Gleichung dieser Tangente an.

   Diese Tangente schneidet den Graphen von f in einem weiteren Punkt Q. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes Q.

   c) Die Punkte $P(0|f(0))$, $R(6|f(6))$ und $H\left(3\middle|\frac{1}{4}\right)$ sind Eckpunkte eines Dreiecks. Berechnen Sie den Flächeninhalt und den Umfang dieses Dreiecks PHR.

d) Der Graph einer quadratischen Funktion q mit der Gleichung

$$q(x) = ax^2 + bx + c$$

berührt den Graphen von f in den Punkten P und R aus Teilaufgabe c. Bestimmen Sie eine Gleichung von q.

e) Für jede reelle Zahl k ist eine Funktion f_k gegeben durch

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + k + 3}{x^2 - 6x + k}$$

mit $(x \in R \wedge x \neq 3 \pm \sqrt{9 - k})$. Eine dieser Funktionen hat genau zwei Nullstellen, wobei eine Nullstelle bei $x_0 = 1$ liegt. Ermitteln Sie die Gleichung dieser Funktion und geben Sie die zweite Nullstelle an.

2. Für jede reelle Zahl t ist eine Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x) = e^x \cdot (x^2 + t) \quad (x \in R)$$

a) Untersuchen Sie den Graphen von f_{-3} auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und lokale Extrempunkte. Geben Sie gegebenenfalls die Koordinaten dieser Punkte an. Begründen Sie, dass der Graph der Funktion f_{-3} zwei Wendepunkte besitzt. Skizzieren Sie den Graphen von f_{-3} in einem geeigneten Intervall.

b) Eine Gerade g verläuft durch den Punkt $P(0|f_{-3}(0))$ und senkrecht zur Tangente h an den Graphen von f_{-3} in diesem Punkt. Die Tangente h, die Gerade g und die x-Achse begrenzen ein Dreieck. Bestimmen Sie die Größe der Innenwinkel und den Flächeninhalt des Dreiecks.
Bei der Rotation dieses Dreiecks um die x-Achse entsteht ein Körper. Berechnen Sie dessen Volumen.

c) Weisen Sie nach, dass die Funktion F_t mit

$$F_t = e^x \cdot (x^2 - 2x + 2 + t)$$

eine Stammfunktion von f_t ist.
In welchem Verhältnis teilt die y-Achse die Fläche, die der Graph der Funktion f_{-3} und die x-Achse vollständig einschließen?

d) Untersuchen Sie, für welche Werte t gilt:
Der Graph der Funktion f_t besitzt keinen Schnittpunkt mit der x-Achse, aber zwei lokale Extrempunkte.

Lösungen

1. a) Die Funktion f ist nicht definiert, wenn der Nenner gleich Null wird:

$$\begin{aligned} 0 &\neq x^2 - 6x + 5 \\ x_{1,2} &\neq 3 \pm \sqrt{3^2 - 5} \\ x_1 &\neq 1 \\ x_2 &\neq 5 \end{aligned}$$

Es ergibt sich der Definitionsbereich $D_f\{x \in R \wedge x \neq 1;\ x \neq 5\}$.

Zum Ableiten nutzt man die Quotientenregel:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 6x + 5} \\ f'(x) &= \frac{(2x-6)(x^2-6x+5) - (x^2-6x+8)(2x-6)}{(x^2-6x+5)^2} \\ &= \frac{(2x-6)(x^2-6x+5-x^2+6x-8)}{(x^2-6x+5)^2} \\ &= \frac{(2x-6)(-3)}{(x^2-6x+5)^2} \\ &= \underline{\underline{\frac{-6(x-3)}{(x^2-6x+5)^2}}} \end{aligned}$$

Für den Schnittpunkt mit y-Achse bestimmt man den Funktionswert $f(0)$:

$$f(0) = \frac{0^2 - 6 \cdot 0 + 8}{0^2 - 6 \cdot 0 + 5} = \frac{8}{5}$$

Der Schnittpunkt mit der y-Achse lautet $S_y\left(0\middle|\frac{8}{5}\right)$.

Zur Bestimmung der Nullstellen setzt man die Funktionsgleichung gleich Null:

$$\begin{aligned}0 &= \frac{x^2-6x+8}{x^2-6x+5}\\ 0 &= x^2-6x+8\\ x_{1,2} &= 3\pm\sqrt{3^2-4}\\ x_1 &= 2\\ x_2 &= 4\end{aligned}$$

Die Funktion f schneidet die x-Achse in den Punkten $S_{x_1}(2|0)$ und $S_{x_2}(4|0)$.

Zur Untersuchung der Funktion auf Extrempunkte setzt man die Ableitungsfunktion gleich Null:

$$\begin{aligned}0 &= \frac{-6(x-3)}{(x^2-6x+5)^2}\\ 0 &= -6x+18\\ x &= 3\end{aligned}$$

Zur Überprüfung, ob es sich tatsächlich um ein Extremum handelt bestimmt man die zweite Ableitung und setzt die mögliche Extremstelle ein.

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{-6(x-3)}{(x^2-6x+5)^2}\\ f''(x) &= \frac{-6(x^2-6x+5)^2+6(x-3)\cdot 2(x^2-6x+5)(2x-6)}{(x^2-6x+5)^4}\\ &= \frac{-6(x^2-6x+5)+6(x-3)\cdot 2(2x-6)}{(x^2-6x+5)^3}\\ &= \frac{-6x^2+36x-30)+12(2x^2-12x+18)}{(x^2-6x+5)^3}\\ &= \frac{18x^2-108x+186}{(x^2-6x+5)^3}\\ f''(3) &= \frac{18\cdot 9-108\cdot 3+186}{(9-18+5)^3} = \frac{24}{-64} < 0\end{aligned}$$

Da die zweite Ableitung an der Extremstelle $x=3$ negativ ist, muss es sich um ein Maximum handeln.

Nun muss noch y bestimmt werden:

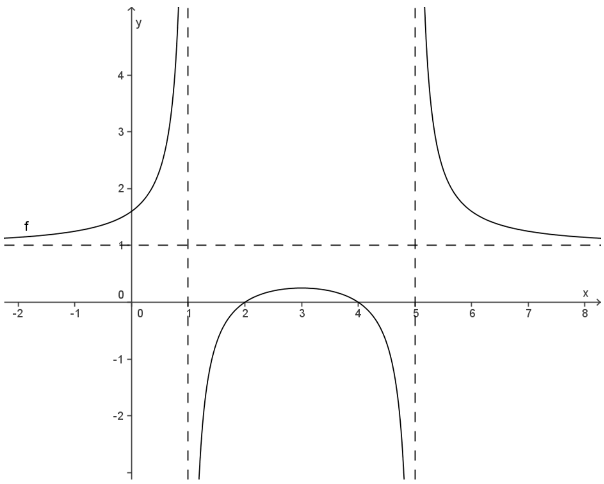
$$f(3) = \frac{9-18+8}{9-18+5} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$$

Die Funktion f hat ein lokales Maximum bei $P_{Max}\left(3|\frac{1}{4}\right)$.

Die Funktion f hat senkrechte Asymptoten bei den Polstellen $x = 1$ und $x = 5$. Zur Bestimmung der waagerechten Asymptote bestimmt man den Grenzwert $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$:

$$\begin{aligned} & \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-6x+8}{x^2-6x+5} \\ = & \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{6}{x}+\frac{8}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}\right)} \\ = & \underline{\underline{1}} \end{aligned}$$

Die Gerade $y = 1$ ist eine Asymptote der Funktion f.



b) Um den Anstieg der Tangente zu bestimmen setzt man die Stelle, an die die Tangente gelegt werden soll in die erste Ableitung ein:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \frac{-6(0-3)}{(0^2-6\cdot 0+5)^2} \\ m &= \frac{18}{25} \end{aligned}$$

Zur Aufstellung der Tangentengleichung muss nun noch das absolute Glied n bestimmt werden:

$$\begin{aligned} y &= mx+n \\ \frac{8}{5} &= \frac{18}{25}\cdot 0+n \\ n &= \frac{8}{5} \\ y &= \underline{\underline{\frac{18}{25}x+\frac{8}{5}}} \end{aligned}$$

Zur Berechnung des Schnittpunkts Q setzt man die beiden Gleichungen gleich:

$$\begin{aligned} \frac{x^2-6x+8}{x^2-6x+5} &= \frac{18}{25}x+\frac{8}{5} \\ x^2-6x+8 &= \frac{18}{25}x^3+\frac{8}{5}x^2-\frac{108}{25}x^2-\frac{48}{5}x+\frac{18}{5}x+8 \\ 0 &= \frac{18}{25}x^3-\frac{93}{25}x^2 \\ 0 &= 18x^3-93x^2 \\ 0 &= x^2(18x-93) \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= \frac{93}{18}=\frac{31}{6} \end{aligned}$$

x_1 ist die Berührungsstelle. Zur Bestimmung Q muss x_2 in die eine der Gleichungen eingesetzt werden. Mit der Tangentengleichung ist es sicher einfacher:

$$y=\frac{18}{25}\cdot\frac{31}{6}+\frac{8}{5}=\frac{93}{25}+\frac{40}{5}=\frac{133}{25}$$

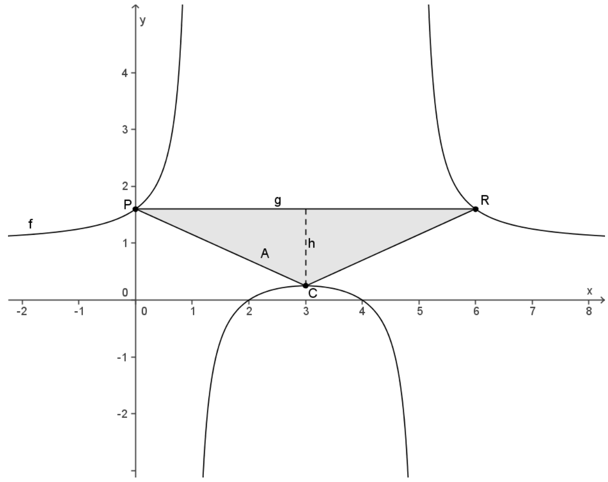
Die Gerade g schneidet die Funktion f im Punkt $Q\left(\frac{31}{6}\middle|\frac{133}{25}\right)$.

c) Zunächst muss der Punkt R bestimmt werden:

$$f(6)=\frac{36-36+8}{36-36+5}=\frac{8}{5}$$

Die Punkte $R\left(6\middle|\frac{8}{5}\right)$ und P liegen auf der Geraden $y=\frac{8}{5}$.

Skizze:



Es handelt sich um ein gleichschenkliges Dreieck mit $\overline{PH} = \overline{RH}$. Für den Flächeninhalt A gilt:

$$A = \frac{1}{2} g \cdot h = \frac{1}{2}\overline{PR} \cdot h = \frac{1}{2}(x_R - x_P)(y_R - y_H) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{27}{20} = \underline{\underline{\frac{81}{20}}}$$

Der Umfang u entspricht der Summe aller Seitenlängen:

$$\begin{aligned} u &= \overline{PR} + \overline{RH} + \overline{HP} = \overline{PR} + 2 \cdot \overline{RH} \\ &= (x_R - x_P) + 2 \cdot \sqrt{(x_H - x_R)^2 + (y_H - y_R)^2} \\ &= 6 + 2 \cdot \sqrt{9 + \frac{729}{400}} \\ &= 6 + 2 \cdot \sqrt{\frac{4329}{400}} \\ &= \frac{60 + \sqrt{4329}}{10} \\ &\approx \underline{\underline{12,58}} \end{aligned}$$

d) Die allgemeine Gleichung einer quadratischen Funktion hat drei Unbekannte. Man muss also ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen aufstellen. Der Anstieg der quadratischen Funktion muss mit dem Anstieg der Funktion f in den Punkten P und R übereinstimmen. Die erste Ableitung von q lautet:

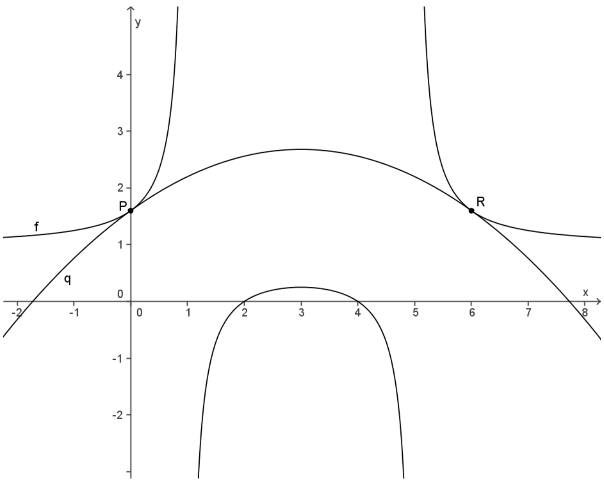
$$q'(x) = 2ax + b$$

Durch Einsetzen der bekannten Informationen ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
q(0) & = & \frac{8}{5} & = & 0^2 \cdot a & + & 0 \cdot b & + & c \\
q(6) & = & \frac{8}{5} & = & 6^2 \cdot a & + & 6 \cdot b & + & c \\
q'(0) & = & \frac{18}{25} & = & 0 \cdot 2a & + & b & & \\
\hline
b & = & \frac{18}{25} & & & & & & \\
c & = & \frac{8}{5} & & & & & & \\
a & = & -\frac{3}{25} & & & & & &
\end{array}
$$

Es ergibt sich die Funktionsgleichung:

$$\underline{\underline{q(x) = -\frac{3}{25}x^2 + \frac{18}{25}x + \frac{8}{5}}}$$

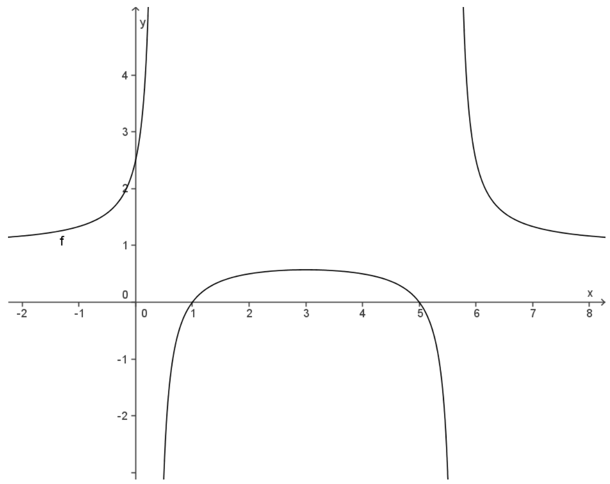


e) Um die Bedingung zu erfüllen, dass $x_0 = 1$ setzt man in die Funktionsgleichung den Punkt $P(1|0)$ ein:

$$
\begin{array}{rcl}
0 & = & \frac{1^2 - 6 \cdot 1 + k + 3}{1^2 - 6 \cdot 1 + k} \\
0 & = & 1 - 6 + 3 + k \\
k & = & 2
\end{array}
$$

Es ergibt sich die Funktionsgleichung:

$$\underline{\underline{f_2(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 6x + 2}}}$$



Nun muss noch die zweite Nullstelle bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 6x + 2} \\
0 &= x^2 - 6x + 5 \\
x_{1,2} &= 3 \pm \sqrt{3^2 - 5} \\
x_1 &= 1 \\
x_2 &= \underline{\underline{5}}
\end{aligned}$$

2. a)

$$f_{-3}(x) = e^x \cdot (x^2 - 3)$$

Zur Untersuchung auf Schnittpunkte der Funktion f_{-3} mit der y-Achse setzt man $x = 0$ in die Funktionsgleichung ein:

$$\begin{aligned}
f_{-3}(0) &= e^0 \cdot (0^2 - 3) \\
&= 1 \cdot (-3) \\
&= -3
\end{aligned}$$

Die Funktion f_{-3} schneidet die y-Achse im Punkt $S_y(0|-3)$.

Um die Nullstellen zu ermitteln setzt man die Funktionsgleichung gleich Null:

$$\begin{aligned} 0 &= e^x \cdot (x^2 - 3) \\ 0 &= x^2 - 3 \\ x_1 &= \sqrt{3} \\ x_2 &= -\sqrt{3} \end{aligned}$$

Die Funktion f_{-3} schneidet die x-Achse in den Punkten $S_{x_1}(\sqrt{3}|0)$ und $S_{x_2}(-\sqrt{3}|0)$.

Um die Extrema zu bestimmen, untersucht man die erste Ableitung auf Nullstellen:

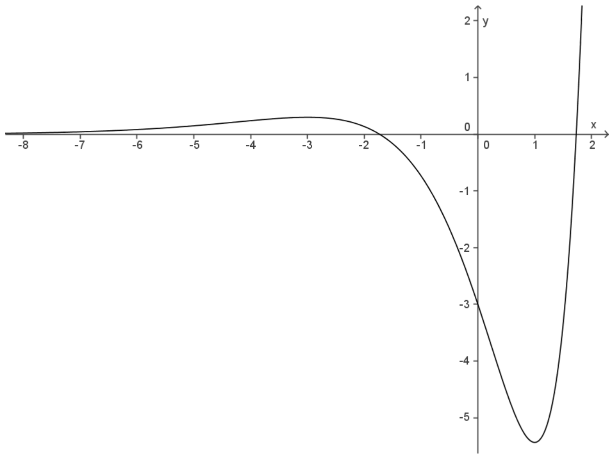
$$\begin{aligned} f_{-3}(x) &= e^x \cdot (x^2 - 3) \\ \\ f'_{-3}(x) &= e^x \cdot (x^2 - 3) + e^x \cdot 2x \\ &= e^x \cdot (x^2 + 2x - 3) \\ 0 &= e^x \cdot (x^2 + 2x - 3) \\ 0 &= x^2 + 2x - 3 \\ x_{1,2} &= -1 \pm \sqrt{1^2 + 3} \\ x_1 &= 1 \\ x_2 &= -3 \end{aligned}$$

Zur Überprüfung, ob es sich tatsächlich um Extrema handelt bestimmt man die Werte der zweiten Ableitung:

$$\begin{aligned} f'_{-3}(x) &= e^x \cdot (x^2 + 2x - 3) \\ \\ f''_{-3}(x) &= e^x \cdot (x^2 + 2x - 3) + e^x \cdot (2x + 2) \\ &= e^x \cdot (x^2 + 4x - 1) \\ f''_{-3}(1) &= e^1 \cdot (1^2 + 4 \cdot 1 - 1) = 4e > 0 \\ f''_{-3}(-3) &= e^{-3} \cdot ((-3)^2 + 4 \cdot (-3) - 1) = -4e^{-3} < 0 \end{aligned}$$

Die Funktion f_{-3} besitzt zwei Extrempunkte. Ein Maximum bei $P_{Max}\left(-3|6e^{-3}\right)$ und ein Minimum bei $P_{Min}(1|-2e)$.

Die zweite Ableitung besitzt zwei Nullstellen an denen die dritte Ableitung ungleich Null sein muss. Es existieren also zwei Wendepunkte.



b) Den Anstieg im Punkt $P(0|-3)$ bestimmt man mit der ersten Ableitung:

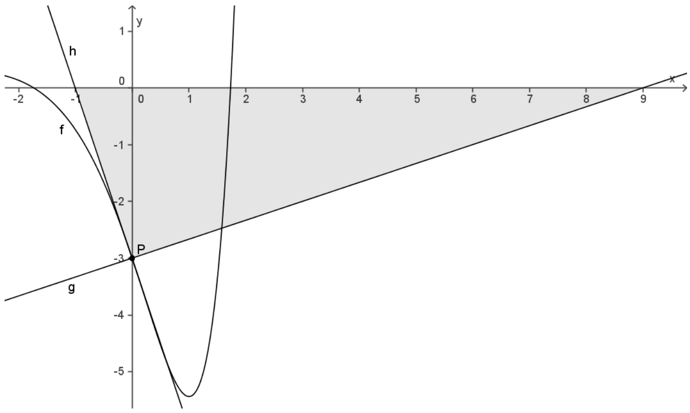
$$f'_{-3}(0) = e^0 \cdot (0^2 + 2 \cdot 0 - 3) = -3$$

Setzt man nun den Punkt P und den Anstieg in die allgemeine Geradengleichung ein, kann man die Tangentengleichung bestimmen:

$$\begin{aligned} y &= mx + n \\ -3 &= -3 \cdot 0 + n \\ n &= -3 \\ h:\ y &= -3x - 3 \end{aligned}$$

Die Normale g ist orthogonal zur Tangente und es gilt:

$$\begin{aligned} m_g &= -\frac{1}{m_h} \\ m_g &= \frac{1}{3} \\ y &= mx + n \\ -3 &= \frac{1}{3} \cdot 0 + n \\ n &= -3 \\ g:\ y &= \frac{1}{3}x - 3 \end{aligned}$$



Den Winkel zwischen zwei Geraden bestimmt man mit der Gleichung:

$$\tan\psi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Für den Winkel zwischen der Tangente h und x-Achse gilt somit:

$$\begin{aligned}\tan\psi &= \frac{0-(-3)}{1+(-3)\cdot 0} \\ \tan\psi &= 3 \\ \psi &\approx \underline{\underline{71,6^\circ}}\end{aligned}$$

Der Winkel zwischen der Tangente h und der Normalen g ist 90°. Aus der Innenwinkelsumme eines Dreiecks kann man nun auf den Winkel der Normalen g und der x-Achse schließen:

$$\begin{aligned}180^\circ &= 90^\circ + 71,6^\circ + \alpha \\ \alpha &= 180^\circ - 161,6^\circ \\ \alpha &= \underline{\underline{18,4^\circ}}\end{aligned}$$

Der Flächeninhalt A ergibt sich aus folgender Gleichung:

$$A = \frac{1}{2} c \cdot h$$

Um die Grundseite c zu ermitteln, werden die Schnittpunkte von h und g mit der x-Achse benötigt:

$$\begin{aligned}
0 &= -3x - 3 \\
x_{0_h} &= -1 \\
0 &= \frac{1}{3}x - 3 \\
x_{0_g} &= 9
\end{aligned}$$

Nun lässt sich der Flächeninhalt berechnen:

$$A = \frac{1}{2}(x_{0_g} - x_{0_h})(0 - y_P) = \frac{1}{2}(9 - (-1))(0 - (-3)) = \underline{\underline{15}}$$

Man kann den entstehenden Rotationskörper in zwei gerade Kreiskegel zerlegen und es ergibt sich für das Volumen:

$$\begin{aligned}
V &= V_1 + V_2 \\
&= \frac{\pi}{3}r^2 h_1 + \frac{\pi}{3}r^2 h_2 \\
&= \frac{\pi}{3}(0 - (-3))(9 - 0) + \frac{\pi}{3}(0 - (-3))(0 - (-1)) \\
&= \frac{\pi}{3}(27 + 3) \\
&= \underline{\underline{10\pi}}
\end{aligned}$$

c) Wenn F_t eine Stammfunktion f_t ist, muss gelten: $F_t' = f_t$.

$$F_t(x) = e^x \cdot (x^2 - 2x + 2 + t)$$

$$\begin{aligned}
F_t'(x) &= e^x \cdot (x^2 - 2x + 2 + t) + e^x \cdot (2x - 2) \\
F_t'(x) &= e^x \cdot (x^2 + t) \\
F_t'(x) &= f_t
\end{aligned}$$

F_t ist eine Stammfunktion von f_t.

Das Verhältnis der beiden Teilflächen $A_1 : A_2$ ergibt sich durch Integration der Funktion f in den Intervallen $I_1 \left[-\sqrt{3}; 0\right]$ und $I_2 \left[0; \sqrt{3}\right]$:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_0^{-\sqrt{3}} e^x \cdot (x^2 - 3)\ dx \\
&= \left[e^x \cdot (x^2 - 2x - 1)\right]_0^{-\sqrt{3}} \\
&= e^{-\sqrt{3}} \cdot (2 + 2\sqrt{3}) + 1 \\
&\approx 1,97
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= \int_{\sqrt{3}}^0 e^x \cdot (x^2 - 3)\ dx \\
&= \left[e^x \cdot (x^2 - 2x - 1)\right]_{\sqrt{3}}^0 \\
&= -1 - \left(e^{\sqrt{3}} \cdot (2 - 2\sqrt{3})\right) \\
&\approx 7,28
\end{aligned}$$

$$A_1 : A_2 \approx 2 : 7$$

Die y-Achse teilt die Fläche, die von der Funktion f und der x-Achse eingeschlossen wird, etwa im Verhältnis $2 : 7$.

d) Wenn der Graph der Funktion keinen Schnittpunkt mit der x-Achse hat, muss gelten: $f_t(x) \geq 0$.

$$\begin{aligned}
e^x \cdot (x^2 + t) &\geq 0 \\
(x^2 + t) &\geq 0 \\
t &\geq 0
\end{aligned}$$

Wenn die Funktion zwei Extrema besitzt, muss die erste Ableitung zwei Nullstellen besitzen:

$$f_t(x) = e^x \cdot (x^2 + t)$$

$$\begin{aligned}
f_t'(x) &= e^x \cdot (x^2 + t) + e^x \cdot 2x \\
&= e^x \cdot (x^2 + 2x + t)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
0 &= e^x \cdot (x^2 + 2x + t) \\
&= x^2 + 2x + t \\
x_{1,2} &= -1 \pm \sqrt{1^2 - t}
\end{aligned}
$$

Die Extrema existieren nur, wenn der Term unter Wurzel nichtnegativ ist:

$$
\begin{aligned}
1 - t &\geq 0 \\
t &\leq 1
\end{aligned}
$$

Für alle Werte t mit $t \in R \wedge 0 \leq t \leq 1$ besitzt die Funktion f_t keine Schnittpunkte mit der x-Achse, aber zwei Extrema.