

# Analysis

www.schulmathe.npage.de

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Zahlenfolgen</b>	<b>4</b>
1.1	Bildungsvorschriften für Zahlenfolgen . . . . .	5
1.2	Monotonie von Zahlenfolgen . . . . .	5
1.3	Arithmetische Zahlenfolgen . . . . .	6
1.4	Geometrische Zahlenfolge . . . . .	6
1.5	Schranken einer Zahlenfolge . . . . .	7
1.5.1	Nachweis von Schranken . . . . .	7
1.6	Grenzwert von Zahlenfolgen . . . . .	8
1.7	Partialsummenfolge . . . . .	9
1.7.1	Summenformel für arithmetische Zahlenfolgen . . . . .	10
1.7.2	Summenformel für geometrische Zahlenfolgen . . . . .	11
1.8	Reihen . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Differentialrechnung</b>	<b>12</b>
2.1	Grenzwerte von Funktionen . . . . .	12
2.1.1	Verhalten einer Funktion im Unendlichen . . . . .	12
2.1.2	Grenzwert an einer Stelle . . . . .	13
2.1.3	Möglichkeiten zur Berechnung der Grenzwerte . . . . .	15
2.2	Stetigkeit . . . . .	15
2.2.1	Stetigkeit einer Funktion an einer Stelle . . . . .	15
2.2.2	Unstetigkeitsstellen . . . . .	15
2.2.3	Stetigkeit im Intervall . . . . .	17
2.2.4	Stetigkeit an jeder Stelle im Definitionsbereich . . . . .	17
2.2.5	Sätze über stetige Funktionen . . . . .	17
2.3	Anstieg einer Funktion im Intervall . . . . .	18
2.4	Anstieg einer Funktion im Punkt . . . . .	19
2.5	Differentiationsregeln . . . . .	20
2.6	Ableitungen höherer Ordnung . . . . .	21
2.6.1	Geometrische Bedeutung der 2. Ableitung . . . . .	22
2.7	Sätze über differenzierbare Funktionen . . . . .	23
2.8	Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit . . . . .	24

<b>3</b>	<b>Anwendung der Differentialrechnung</b>	<b>24</b>
3.1	Monotonie von Funktionen . . . . .	24
3.2	Extrempunkte . . . . .	24
3.2.1	Berechnung lokaler Extrempunkte . . . . .	25
3.3	Wendepunkte einer Funktion . . . . .	26
3.3.1	Berechnungen von Wendepunkten . . . . .	26
3.4	Weitere Eigenschaften von Funktionen . . . . .	28
3.4.1	Verhalten im Unendlichen - schräge Asymptoten . . . . .	28
3.4.2	Nullstellen, Polstellen, Lücken . . . . .	29
3.4.3	Symmetrie . . . . .	29
3.5	Vollständige Kurvenuntersuchung . . . . .	30
3.6	Kurvenscharen . . . . .	32
3.6.1	Ortskurven . . . . .	32
3.7	Rekonstruktion von Funktionen . . . . .	33
3.8	Extremwertaufgaben . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Integralrechnung</b>	<b>35</b>
4.1	Integrationsregeln . . . . .	36
4.2	Integration durch lineare Substitution . . . . .	36
4.3	Das bestimmte Integral . . . . .	37
4.4	Erweiterung des Integralbegriffs . . . . .	38
4.5	Mittelwertsatz der Integralrechnung . . . . .	38
4.6	Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung . . . . .	39
<b>5</b>	<b>Anwendung der Integralrechnung</b>	<b>41</b>
5.1	Flächenberechnungen . . . . .	41
5.1.1	Die Fläche liegt vollständig oberhalb der Abszissenachse . . . . .	41
5.1.2	Die Fläche liegt vollständig unterhalb der Abszissenachse . . . . .	42
5.1.3	Die Fläche wird von der Abszissenachse geteilt . . . . .	42
5.1.4	Die Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen . . . . .	43
5.2	Volumen von Rotationskörpern . . . . .	44
5.2.1	Rotation um die Abszissenachse . . . . .	45
5.2.2	Rotation um die Ordinatenachse . . . . .	46
5.3	Weitere Integrationsregeln . . . . .	46
5.3.1	Allgemeine Substitutionsregel . . . . .	46
5.4	Partielle Integration . . . . .	47
5.5	Uneigentliche Integrale . . . . .	48
<b>6</b>	<b>Exponential-, Logarithmus- und Winkelfunktionen</b>	<b>49</b>
6.1	Differentiation der Exponentialfunktionen . . . . .	49
6.1.1	Die Eulersche Zahl . . . . .	50
6.1.2	Ableitung einer beliebigen Exponentialfunktionen . . . . .	50
6.1.3	Kurvenuntersuchung für Exponentialfunktionen . . . . .	51
6.2	Integration der Exponentialfunktionen . . . . .	51

6.3	Differentiation der Logarithmusfunktionen . . . . .	52
6.3.1	Kurvenuntersuchung für Logarithmusfunktionen . . . . .	52
6.4	Integration der Logarithmusfunktionen . . . . .	53
6.5	Winkelfunktionen . . . . .	53
6.5.1	Differentiation der Winkelfunktionen . . . . .	54
6.5.2	Kurvenuntersuchung für Winkelfunktionen . . . . .	55
6.5.3	Integration der Winkelfunktionen . . . . .	56

# 1 Zahlenfolgen

## Definition:

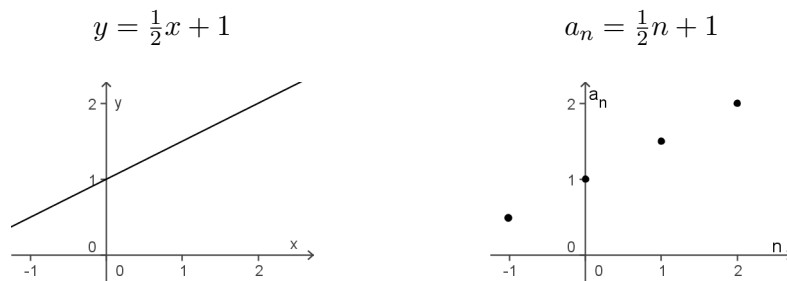
Eine Funktion mit der Menge  $N^*$  der natürlichen Zahlen ( $\neq 0$ ) als Definitionsbereich und einer Teilmenge der Menge der reellen Zahlen als Wertebereich nennt man Zahlenfolge.

## Schreibweisen und Bezeichnungen:

Argument	$\rightarrow n$	- Nummer eines Folgenglieds
Funktionswert	$\rightarrow a_n$	- Glieder der Zahlenfolge ( $a_1; a_2; \dots$ )
Funktionsgleichung	$\rightarrow$	Bildungsvorschrift ( $a_n = 3n + 5$ )

Eine Zahlenfolge hat unendlich viele Folgenglieder.

## Unterschiede im Graph der Funktion



## Beispiele für Zahlenfolgen:

- Folge der geraden Zahlen  
 $(a_n) = (2; 4; 6; 8; \dots)$   
 $(a_n) = (2n)$
- Folge der Quadratzahlen  
 $(b_n) = (1; 4; 9; 16; \dots)$   
 $(b_n) = (n^2)$
- Folge der Primzahlen  
 $(c_n) = (2; 3; 5; 7; \dots)$   
 $(c_n) =$  keine Bildungsvorschrift möglich

## 1.1 Bildungsvorschriften für Zahlenfolgen

Beispiel:  $(a_n) = (3; 9; 27; 81; \dots)$

Explizite Bildungsvorschrift

Aus der Kenntnis der Nummer des Folgengliedes lässt sich sofort berechnen:

$$(a_n) = (3^n)$$

Rekursive Bildungsvorschrift

Um ein bestimmtes Folgenglied berechnen zu können, muss man alle vorangegangenen kennen. Sie besteht immer aus zwei Teilen:

1. Angabe des ersten Folgengliedes
2. Term zur Berechnung eines Folgengliedes aus dem Vorgängerglied

$$a_1 = 3$$

$$a_{n+1} = a_n \cdot 3$$

## 1.2 Monotonie von Zahlenfolgen

Definition:

Eine Zahlenfolge heißt:

- monoton steigend, wenn für alle  $n \in \mathbb{N}^*$  gilt:

$$a_{n+1} - a_n > 0$$

- monoton fallend, wenn für alle  $n \in \mathbb{N}^*$  gilt:

$$a_{n+1} - a_n < 0$$

- konstant, wenn für alle  $n \in \mathbb{N}^*$  gilt:

$$a_{n+1} - a_n = 0$$

- alternierend, wenn für alle  $n \in \mathbb{N}^*$  gilt:

$$a_{n+1} \cdot a_n < 0$$

### 1.3 Arithmetische Zahlenfolgen

Definition:

Eine Zahlenfolge  $(a_n)$  heißt arithmetische Zahlenfolge, wenn die Differenz zweier benachbarter Folgenglieder stets eine konstante Zahl  $d$  ist. Es gilt:

$$a_{n+1} - a_n = d \quad (d \in \mathbb{R}) \quad (1.1)$$

Bildungsvorschrift:

rekursive Bildungsvorschrift: Aus der Definition folgt:

$$a_{n+1} = a_n + d \quad ; \quad a_1 = \dots$$

explizite Bildungsvorschrift:

$$(a_n) = a_1 + (n - 1) \cdot d \quad (1.2)$$

### 1.4 Geometrische Zahlenfolge

Definition:

Eine Folge  $(a_n)$  mit  $a_n \neq 0$  heißt geometrische Zahlenfolge, wenn der Quotient  $q$  benachbarter Folgenglieder stets eine konstante reelle Zahl ist. Es gilt:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad (1.3)$$

Bildungsvorschrift:

rekursive Bildungsvorschrift: Aus der Definition folgt:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q \quad ; \quad a_1 = \dots$$

explizite Bildungsvorschrift:

$$(a_n) = a_1 \cdot q^{n-1} \quad (a_1 \neq 0; q \neq 0) \quad (1.4)$$

## 1.5 Schranken einer Zahlenfolge

Definition:

$(a_n)$  sei eine beliebige Zahlenfolge.

Eine Zahl  $S_o \in R$  ist eine obere Schranke der Zahlenfolge  $(a_n)$ , wenn für alle  $n \in N^*$  gilt:

$$a_n \leq S_o$$

Eine Zahl  $S_u \in R$  ist eine untere Schranke der Zahlenfolge  $(a_n)$ , wenn für alle  $n \in N^*$  gilt:

$$a_n \geq S_u$$

- Besitzt eine Zahlenfolge eine obere (untere) Schranke, so heißt sie nach oben (unten) beschränkt.
- Existieren obere und untere Schranken, so nennt man die Folge beschränkt.
- Gibt es eine obere (untere) Schranke, so gibt es stets unendlich viele obere (untere) Schranken.

### 1.5.1 Nachweis von Schranken

Beispiel:  $(a_n) = \left(\frac{5+2n}{3n}\right)$

untere Schranke:  $S_u = \frac{2}{3}$

Nachweis: Wenn  $\frac{2}{3}$  eine untere Schranke ist, dann muss nach Definition gelten:  $a_n \geq \frac{2}{3}$

$$\left(\frac{5+2n}{3n}\right) \geq \frac{2}{3}$$

$$5+2n \geq 2n$$

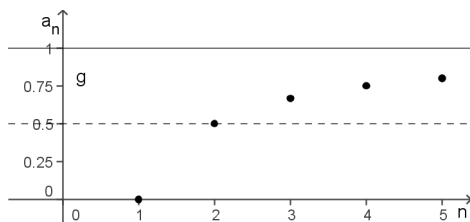
$$5 \geq 0 \quad \rightarrow \quad \frac{2}{3} \text{ ist untere Schranke der Folge } (a_n).$$

- Die größte aller unteren Schranken einer Zahlenfolge heißt untere Grenze.
- Die kleinste aller oberen Schranken einer Zahlenfolge heißt obere Grenze.

## 1.6 Grenzwert von Zahlenfolgen

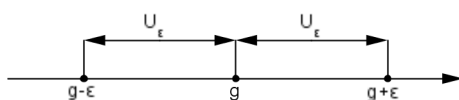
Beispiel:

$$(a_n) = \left( \frac{n-1}{n} \right)$$



Definition:

Ist  $g$  eine reelle Zahl und  $\epsilon$  eine beliebig kleine positive reelle Zahl, so nennt man das offene Intervall  $(g - \epsilon; g + \epsilon)$  die  $\epsilon$ -Umgebung  $U_\epsilon$  der Zahl  $g$ .



$$|a_n - g| < \epsilon$$

zum Beispiel:

$$\begin{aligned} g &= 1 \\ \epsilon &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$|a_n - g| < \epsilon$$

$$\left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| < \frac{1}{2}$$

$$\left| \frac{n-1}{n} - \frac{n}{n} \right| < \frac{1}{2}$$

$$\left| -\frac{1}{n} \right| < \frac{1}{2}$$

$n > 2 \rightarrow$  Ab dem dritten Glied der Zahlenfolge liegen alle  $a_n$  innerhalb  $U_\epsilon$ .

Definition:

Eine Zahl  $g$  heißt genau dann Grenzwert einer Zahlenfolge  $a_n$ , wenn in jeder (noch so kleinen)  $\epsilon$ -Umgebung von  $g$  unendlich viele Glieder der Zahlenfolge liegen, aber außerhalb höchstens endlich viele Glieder der Zahlenfolge liegen.

Das heißt, wenn fast alle Glieder der Zahlenfolge die Ungleichung  $|a_n - g| < \epsilon$  erfüllen.

Definition:

Eine Zahlenfolge, die einen Grenzwert besitzt heißt konvergent. Zahlenfolgen ohne Grenzwert heißen divergent.

Definition:

Eine Zahlenfolge mit dem Grenzwert 0 heißt Nullfolge.

Grenzwertsätze:

Sind  $(a_n)$  und  $(b_n)$  beliebige Zahlenfolgen, so gilt:

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) \pm \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n : b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) : \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)$

## 1.7 Partialsummenfolge

Definition:

Ist  $(a_n) = (a_1; a_2; a_3; \dots)$  eine beliebige Zahlenfolge, so heißt die Summe  $s_n$  der ersten  $n$  Folgenglieder  $n$ -te Partialsumme der Folge  $(a_n)$ . Es gilt also:

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k \tag{1.5}$$

Die Folge  $(m) = (a_1; a_1 + a_2; a_1 + a_2 + a_3; \dots)$  heißt Partialsummenfolge.

### 1.7.1 Summenformel für arithmetische Zahlenfolgen

Eine arithmetische Zahlenfolge hat die explizite Bildungsvorschrift (1.2). Somit gilt für die Partialsummenfolge:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 &= a_1 + a_1 + d \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 &= a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d \\ s_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d \\ &\vdots &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n &= a_1 + a_1 + d + \dots + a_1 + (n-1)d \\ &&= n \cdot a_1 + d \cdot [1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)] \\ &&= n \cdot a_1 + d \cdot \left( \sum_{k=1}^{n-1} k \right) \end{aligned}$$

Für arithmetische Folgen gilt:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n}{2} \cdot (n+1)$$

Daraus folgt:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n-1}{2} \cdot n$$

Somit ergibt sich:

$$s_n = n \cdot a_1 + d \cdot \frac{n-1}{2} \cdot n \tag{1.6}$$

Durch geeignete Umformungen entsteht folgende Gleichung:

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) \tag{1.7}$$

### 1.7.2 Summenformel für geometrische Zahlenfolgen

Eine geometrische Zahlenfolge hat die explizite Bildungsvorschrift (1.4). Somit gilt für die Partialsummenfolge:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 &= a_1 + a_1 \cdot q \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 &= a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 \\ s_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 \\ &\vdots &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n &= a_1 + a_1 \cdot q + \dots + a_1 \cdot q^{n-1} \end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} s_n \cdot q &= a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \dots + a_1 \cdot q^n \\ s_n - s_n \cdot q &= a_1 - a_1 \cdot q^n \\ s_n(1 - q) &= a_1(1 - q^n) \end{aligned}$$

Somit ergibt sich folgende Gleichung:

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad (q \neq 1) \quad (1.8)$$

## 1.8 Reihen

Definition:

Ist  $(a_n) = (a_1; a_2; a_3; \dots)$  eine beliebige Zahlenfolge, so heißt  $(a_1; a_1 + a_2; a_1 + a_2 + a_3; \dots)$  (unendliche) Reihe.

Man schreibt dafür  $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$  und versteht darunter die Folge der Partialsummen

$$(s_n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_n = (a_1; a_1 + a_2; a_1 + a_2 + a_3; \dots).$$

Falls der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  existiert, so heißt er Summe oder Wert der Reihe.

Für die Existenz des Grenzwertes der Partialsummenfolgen gilt:

- Arithmetische Zahlenfolgen sind stets divergent

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \text{ existiert nicht}$$

- Geometrische Zahlenfolgen sind konvergent, wenn  $|q| < 1$ .

→  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  existiert nur für  $|q| < 1$

Für den Grenzwert gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$q^n$  ist eine Nullfolge, wenn gilt:  $|q| < 1$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = a_1 \cdot \frac{1 - 0}{1 - q}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a_1}{1 - q} \tag{1.9}$$

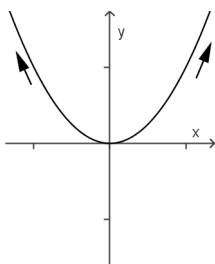
## 2 Differentialrechnung

### 2.1 Grenzwerte von Funktionen

#### 2.1.1 Verhalten einer Funktion im Unendlichen

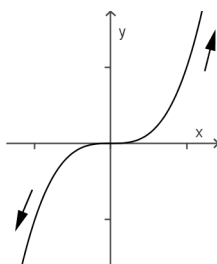
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$$

$$f(x) = x^2$$



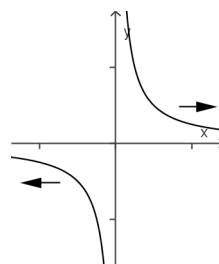
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$$

$$f(x) = x^3$$



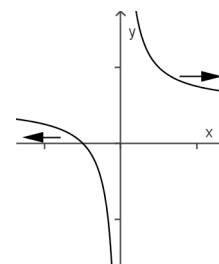
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$



$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{x} + 2$$



$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2$$

Es gilt:

- Existiert ein Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ , so besitzt die Funktion  $f$  eine waagerechte Asymptote. Nimmt dieser Grenzwert einen Wert  $g$  an, so hat die Asymptote die Gleichung  $y = g$
- Ist  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ , so hat die Funktion  $f$  keine waagerechte Asymptote. Die Funktionswerte wachsen oder fallen unbegrenzt.

Berechnung von Grenzwerten:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x+1}{2x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\cancel{x}^2 \left( \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{\cancel{x}^2 \left( 2 - \frac{1}{x^2} \right)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5x^2+3x}{4x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\cancel{x}^2 \left( 5 + \frac{3}{x} \right)}{\cancel{x}^2 \left( 4 - \frac{1}{x^2} \right)} = \frac{5}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5x^2-3x}{4x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\cancel{x} (5x-3)}{\cancel{x} \left( 4 - \frac{1}{x} \right)} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5x^3-3x}{4x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\cancel{x} (5x^2-3)}{\cancel{x} \left( 4 - \frac{1}{x} \right)} = +\infty$$

### 2.1.2 Grenzwert an einer Stelle

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

Beispiel:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad x_0 = 1$$

Die Funktion ist an der Stelle  $x_0 = 1$  nicht definiert. So stellt sich die Frage wie sich die Funktionswerte in der Umgebung der Stelle 1 verhalten. Dazu berechnet man die Grenzwerte für die Annäherung an die Stelle 1 von links (linksseitiger Grenzwert) und von rechts (rechtsseitiger Grenzwert).

im Beispiel:

1. Linksseitiger Grenzwert:

Man ersetzt  $x$  durch eine Zahlenfolge, die monoton steigend und den Grenzwert 1 hat. Bsp.:  $1 - \frac{1}{n}$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2-1}{x-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 - 1}{1 - \frac{1}{n} - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right) \\ &= \underline{2}\end{aligned}$$

Nähern sich die Argumente dem Wert  $x_0 = 1$ , so nähern sich die Funktionswerte dem Wert  $f(x) = 2$ .

2. Rechtsseitiger Grenzwert:

Man ersetzt  $x$  durch eine fallende Zahlenfolge mit dem Grenzwert 1. Bsp.:  $1 + \frac{1}{n}$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2-1}{x-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - 1}{1 + \frac{1}{n} - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \underline{2}\end{aligned}$$

Nähern sich die Argumente dem Wert  $x_0 = 1$ , so nähern sich die Funktionswerte dem Wert  $f(x) = 2$ .

$$\underline{\underline{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2}}$$

Definition:

Es sei  $f(x)$  eine in einer Umgebung der Stelle  $x_0$  definierte Funktion (eventuell unter Ausschluss der Stelle  $x_0$ ).

$f(x)$  hat an der Stelle  $x_0$  den Grenzwert wenn gilt:

Für alle gegen  $x_0$  konvergierenden Folgen von Argumenten, konvergieren die Funktionswerte gegen  $g$ .

Man schreibt:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$

### 2.1.3 Möglichkeiten zur Berechnung der Grenzwerte

1. Funktionsterm ist an der Stelle  $x_0$  definiert:

$x_0$  einsetzen. Der Funktionswert entspricht dem Grenzwert.

2. Funktionsterm ist an der Stelle  $x_0$  nicht definiert, aber lässt sich vereinfachen:

Beispiel: 
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)(x - 2)}{(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = \underline{4}$$

3. Ist der Funktionsterm an der Stelle  $x_0$  nicht definiert und lässt sich nicht vereinfachen, dann muss man den links- und rechtsseitigen Grenzwert bilden.

## 2.2 Stetigkeit

### 2.2.1 Stetigkeit einer Funktion an einer Stelle

Definition:

Eine Funktion  $f$  heißt an der Stelle  $x_0$  stetig, wenn diese Funktion an der Stelle  $x_0$  definiert ist, der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existiert und  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  ist.

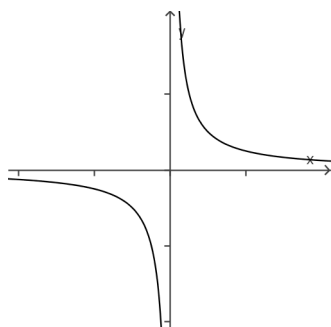
### 2.2.2 Unstetigkeitsstellen

1. Polstelle

- $f$  ist eine an der Stelle  $x_0$  nicht definiert.
- Es existiert kein Grenzwert an der Stelle  $x_0$ , das heißt, dass entweder der rechtsseitige Grenzwert oder der linksseitige Grenzwert oder beide  $+\infty$  oder  $-\infty$  sind.

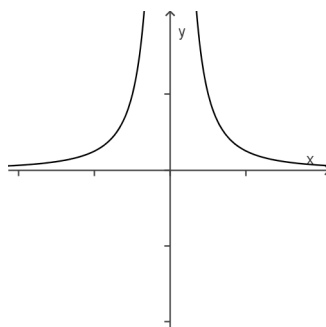
Beispiel:

$$f(x) = \frac{1}{x} ; x_0 = 0$$



ungerade Polstelle

$$f(x) = x^2 ; x_0 = 0$$



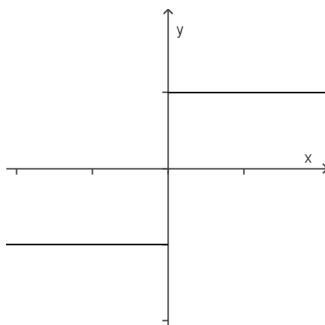
gerade Polstelle

An einer Polstelle existiert stets eine senkrechte Asymptote.

## 2. Endlicher Sprung

- $f$  kann an der Stelle  $x_0$  definiert sein, muss aber nicht.
- Es gibt keinen Grenzwert an der Stelle  $x_0$ , das heißt, dass ein links- bzw. rechtsseitiger Grenzwert existiert, aber sie sind nicht gleich groß.

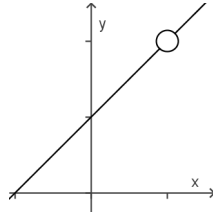
$$f(x) = \frac{|x|}{x} ; x_0 = 0$$



## 3. Lücke

- $f$  ist an der Stelle  $x_0$  nicht definiert.
- Der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existiert.

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} ; x_0 = 1$$



Ein Lücke lässt sich stets durch eine Zusatzdefinition schließen.

### 2.2.3 Stetigkeit im Intervall

#### Definition

Ist die Funktion  $f$  an jeder Stelle  $x_0$  eines Intervalls  $[a; b]$  stetig, so sagt man:  $f$  ist in  $[a; b]$  stetig.

### 2.2.4 Stetigkeit an jeder Stelle im Definitionsbereich

#### Definition

Ist die Funktion  $f$  an jeder Stelle  $x_0$  ihres Definitionsbereiches stetig, so sagt man:  $f$  ist stetig.

### 2.2.5 Sätze über stetige Funktionen

#### Zwischenwertsatz

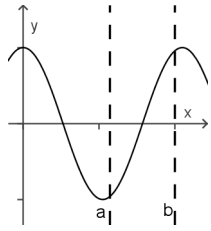
Ist  $f$  eine im abgeschlossenen Intervall  $[a; b]$  stetige Funktion und ist  $f(a) \neq f(b)$ , so nimmt  $f$  im Intervall  $[a; b]$  jeden Wert zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  wenigstens einmal an.

#### Der Nullstellensatz von Bolzano

Ist die Funktion  $f$  im Intervall  $[a; b]$  stetig und besitzen  $f(a)$  und  $f(b)$  verschiedene Vorzeichen, so hat die Funktion  $f$  im Intervall  $[a; b]$  mindestens eine Nullstelle.

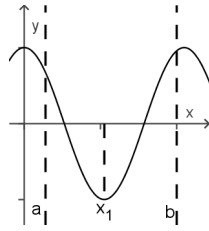
#### Der Satz von Minimum und Maximum

Ist die Funktion  $f$  im Intervall  $[a; b]$  stetig, so besitzt  $f$  in diesem Intervall ein Minimum (einen kleinsten Funktionswert) und ein Maximum (einen größten Funktionswert).



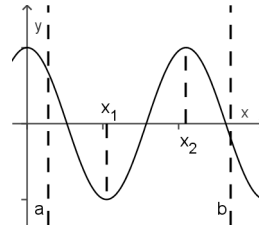
$f(a)$ - Minimum  
 $f(b)$ - Maximum

Minimum und Maximum liegen auf den Rändern.



$f(x_1)$ -Minimum  
 $f(b)$ -Maximum

Ein Extremum liegt auf dem Rand, das andere im Intervall.



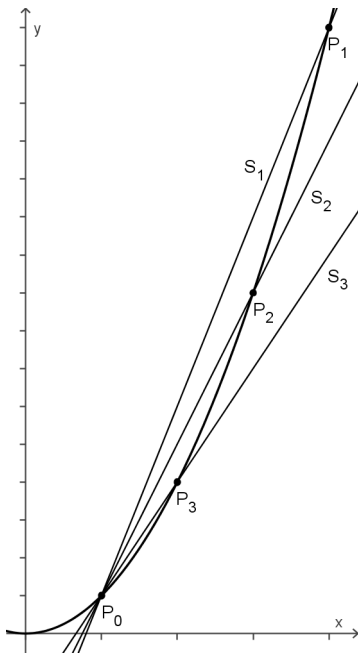
$f(x_1)$ -Minimum  
 $f(x_2)$ -Maximum

Beide Extrema liegen im Intervall.

### 2.3 Anstieg einer Funktion im Intervall

Beispiel:

$$f(x) = x^2 \quad P(1|f(1)) \quad P(x|f(x)) \quad \text{mit } x > 1$$



1.  $x = 4 \rightarrow P_1(4|16)$

Anstieg der Sekante  $S_1$ :

$$m_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{16-1}{4-1} = \underline{\underline{5}}$$

2.  $x = 3 \rightarrow P_2(3|9)$

Anstieg der Sekante  $S_2$ :

$$m_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9-1}{3-1} = \underline{\underline{4}}$$

3.  $x = 2 \rightarrow P_3(2|4)$

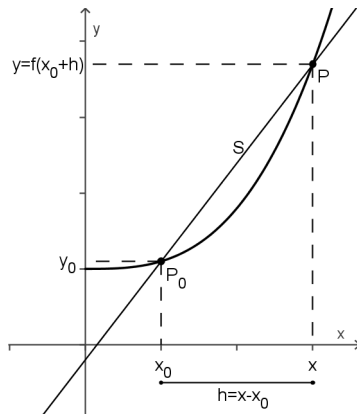
Anstieg der Sekante  $S_3$ :

$$m_3 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-1}{2-1} = \underline{\underline{3}}$$

Im Beispiel ist erkennbar, dass sich der Anstieg der Funktion im betrachteten Intervall in Abhängigkeit von der Lage des Punktes  $P$  ändert. Es lässt sich also eine neue Funktion

definieren, die der  $x$ -Koordinate des Punktes  $P$  den zugehörigen Anstieg der Sekante zuordnet. Diese Funktion heißt Differenzenquotient.

Allgemein:



- $P_0(x_0|f(x_0))$  ist ein fester Punkt auf  $f$ .
- $P(x|f(x))$  ist ein variabel wählbarer Punkt auf  $f$ .

Definition:

Es sei  $f$  eine im Definitionsbereich stetige Funktion und  $x_0, x_0 + h \in D_f$ .

Die Funktion

$$D(h) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (2.1)$$

heißt Differenzenquotient von  $f$  an der Stelle  $x_0$ . Sie gibt den mittleren Anstieg der Funktion  $f$  im Intervall  $[x_0; x_0 + h]$  an.

## 2.4 Anstieg einer Funktion im Punkt

Je näher der benachbarte Punkt  $P$  zum Punkt  $P_0$  wandert, desto geringer ist der Unterschied zwischen dem Anstieg der Sekante durch  $P_0$  und  $P$  und dem Anstieg der Tangente im Punkt  $P_0$ . Wenn  $P = P_0$  so entspricht der Wert des Differenzenquotienten dem Anstieg der Tangente. Da  $D(0)$  nicht definiert ist (Division durch 0), berechnet man  $\lim_{h \rightarrow 0} D(h)$ . Dieser Grenzwert heißt Differentialquotient.

Definition:

Es sei  $f$  eine im Definitionsbereich stetige Funktion und  $x_0, x_0 + h \in D_f$ . Die Funktion heißt differenzierbar an der Stelle  $x_0$ , wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} D(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (2.2)$$

existiert. Der Grenzwert heißt Differentialquotient oder 1. Ableitung der Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$ . Statt dem Grenzwert (2.2) schreibt man kurz:  $f'(x_0)$ . Der Differentialquotient gibt den Anstieg einer Funktion an der Stelle  $x_0$  an. Dies entspricht dem Anstieg der Tangente an der Stelle  $x_0$ .

## 2.5 Differentiationsregeln

Ordnet man jeder beliebigen Stelle  $x_0$ , an der eine Funktion  $f$  differenzierbar ist, den entsprechenden Wert der 1. Ableitung zu, so ist diese Zuordnung wieder eine Funktion. Diese Funktion nennt man Ableitungsfunktion  $f'$  von  $f$ .

### 1. Konstantenregel

Jede Funktion  $f(x) = c$  ( $c \in \mathbb{R}$ ) ist an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches differenzierbar und es gilt:

$$f'(x) = 0 \quad (2.3)$$

### 2. Faktorregel

Ist  $f$  eine im gesamten Definitionsbereich differenzierbare Funktion, so ist auch  $g$  mit  $g(x) = k \cdot f(x)$  ( $k \in \mathbb{R}$ ) im gesamten Definitionsbereich differenzierbar und es gilt:

$$g'(x) = k \cdot f'(x) \quad (2.4)$$

### 3. Summenregel

Sind die Funktionen  $u$  und  $v$  differenzierbar, so ist auch die Funktion  $f$  mit  $f(x) = u(x) + v(x)$  differenzierbar und es gilt:

$$f'(x) = u'(x) + v'(x) \quad (2.5)$$

### 4. Produktregel

$u$  und  $v$  sind differenzierbare Funktionen, so ist auch die Funktion  $f$  mit  $f(x) = u(x) \cdot v(x)$  differenzierbar und es gilt:

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \quad (2.6)$$

### Ableitung einer Potenzfunktion

Jede Funktion  $f(x) = x^n$  ( $n \in \mathbb{R}$ ) ist im gesamten Definitionsbereich differenzierbar und es gilt:

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1} \quad (2.7)$$

### 5. Quotientenregel

Sind die Funktionen  $u$  und  $v$  differenzierbar, so ist auch die Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$  ( $v(x) \neq 0$ ) differenzierbar und es gilt:

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} \quad (2.8)$$

### 6. Kettenregel

Eine Funktion  $f(x) = u(v(x))$  heißt verkettete Funktion.

$$\begin{array}{ll} u(v(x)) & - \text{äußere Funktion} \\ v(x) & - \text{innere Funktion} \end{array}$$

Sind die Funktionen  $u$  und  $v$  differenzierbar, so ist auch die Funktion  $f$  mit  $f(x) = u(v(x))$  differenzierbar und es gilt:

$$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x) \quad (2.9)$$

## 2.6 Ableitungen höherer Ordnung

Ist die Funktion  $f'$  einer Funktion  $f$  differenzierbar, so nennt man  $f$  zweimal differenzierbar. Die entstehende Ableitung von  $f'$  nennt man 2. Ableitung von  $f$  und bezeichnet sie mit  $f''$ . Analog existieren für eine Funktion  $f$  die 3., 4., 5., ...Ableitung.

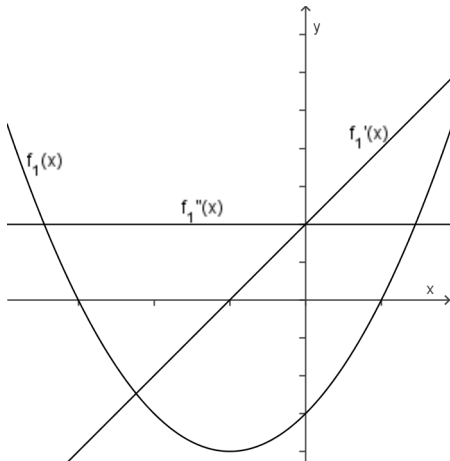
Beispiel:

$$\begin{array}{ll} f(x) & = x^3 + 5x^2 - 7x + 1 \\ f'(x) & = 3x^2 + 10x - 7 \\ f''(x) & = 6x + 10 \\ f'''(x) & = 6 \\ f^{(4)}(x) & = 0 \end{array}$$

## 2.6.1 Geometrische Bedeutung der 2. Ableitung

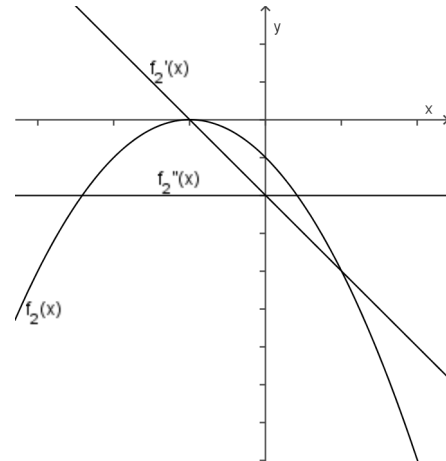
Beispiel:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^2 + 2x - 1 \\ f_1'(x) &= 2x + 2 \\ f_1''(x) &= 2 \end{aligned}$$



- $f'$  ist für  $x < -1$  negativ,  $\rightarrow f$  ist für  $x < -1$  monoton fallend.
- $f'$  ist für  $x > -1$  positiv,  $\rightarrow f$  ist für  $x > -1$  monoton steigend.
- An der Stelle  $x = -1$  existiert ein Minimum.
  - $\rightarrow$  Der Anstieg der Funktion wird größer.
  - $\rightarrow$  Die Funktion ist linksgekrümmt. ( $f''(x) > 0$ )

$$\begin{aligned} f_2(x) &= -x^2 - 2x - 1 \\ f_2'(x) &= -2x - 2 \\ f_2''(x) &= -2 \end{aligned}$$



- $f'$  ist für  $x < -1$  positiv,  $\rightarrow f$  ist für  $x < -1$  monoton steigend.
- $f'$  ist für  $x > -1$  negativ,  $\rightarrow f$  ist für  $x > -1$  monoton fallend.
- An der Stelle  $x = -1$  existiert ein Maximum.
  - $\rightarrow$  Der Anstieg der Funktion wird kleiner.
  - $\rightarrow$  Die Funktion ist rechtsgekrümmt. ( $f''(x) < 0$ )

Allgemein:

Eine Funktion  $f$  sei zweimal differenzierbar. Aus den Werten der 2. Ableitung lassen sich folgende Aussagen über das Krümmungsverhalten ableiten:

Ist  $f''(x) > 0$ , so ist  $f$  linksgekrümmt.

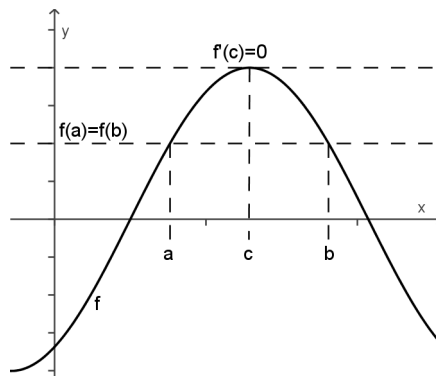
Ist  $f''(x) < 0$ , so ist  $f$  rechtsgekrümmt.

Existiert eine Stelle  $x$ , an der das Vorzeichen von  $f''(x)$  wechselt ( $f''(x) = 0$ ), dann hat  $f$  an dieser Stelle einen Wendepunkt.

## 2.7 Sätze über differenzierbare Funktionen

### 1. Satz von Rolle

Ist eine Funktion  $f$  im abgeschlossenen Intervall  $[a; b]$  stetig und im offenen Intervall  $]a; b[$  differenzierbar und gilt  $f(a) = f(b)$ , so existiert im Intervall  $]a; b[$  mindestens eine Stelle  $c$  mit  $f'(c) = 0$ .

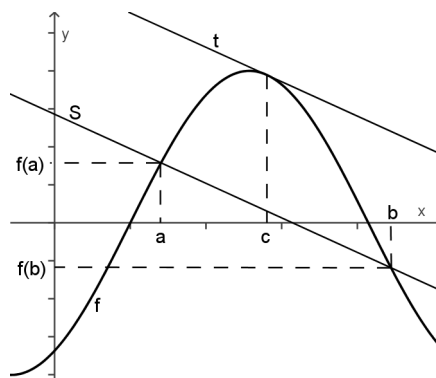


### 2. Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Ist eine Funktion  $f$  im abgeschlossenen Intervall  $[a; b]$  stetig und im offenen Intervall  $]a; b[$  differenzierbar, so existiert im Intervall  $]a; b[$  mindestens eine Stelle  $c$ , für die gilt:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Das heißt, dass es zur Sekante durch die Punkte  $P(a|f(a))$  und  $P(b|f(b))$  im Intervall  $]a; b[$  stets eine parallele Tangente an die Funktion  $f$  gibt.



## 2.8 Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit

1. Die Stetigkeit ist eine notwendige Bedingung für die Differenzierbarkeit. Das heißt:
  - Ist die Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$  nicht stetig, so ist sie dort auch nicht differenzierbar.
  - Ist die Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$  stetig, so kann sie dort differenzierbar sein, muss aber nicht.
2. Die Differenzierbarkeit ist eine hinreichende Bedingung für die Stetigkeit. Das heißt:
  - Ist die Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$  differenzierbar, so ist sie an dieser Stelle stetig.
  - Ist die Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$  nicht differenzierbar, so kann sie an dieser Stelle stetig sein, muss aber nicht.

## 3 Anwendung der Differentialrechnung

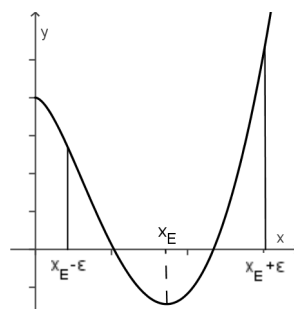
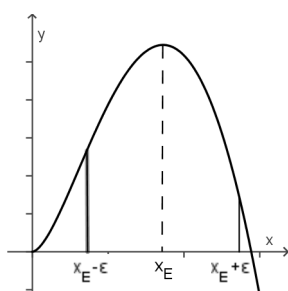
### 3.1 Monotonie von Funktionen

Die Ableitung einer Funktion an einer Stelle  $x_0$  gibt den Anstieg der Funktion an der Stelle  $x_0$  an. Daraus folgt für die Monotonie:

Es sei  $f$  eine im Intervall  $]a; b[$  differenzierbare Funktion. Dann gilt:

- Ist  $f'(x) > 0$  für alle  $x \in ]a; b[$ , so ist  $f$  in  $]a; b[$  monoton steigend.
- Ist  $f'(x) < 0$  für alle  $x \in ]a; b[$ , so ist  $f$  in  $]a; b[$  monoton fallend.

### 3.2 Extrempunkte



Definition:

Ist  $f$  eine im offenen Intervall  $I(]x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon[)$  definierte Funktion, so heißt  $f(x_E)$ :

lokales Maximum

lokales Minimum

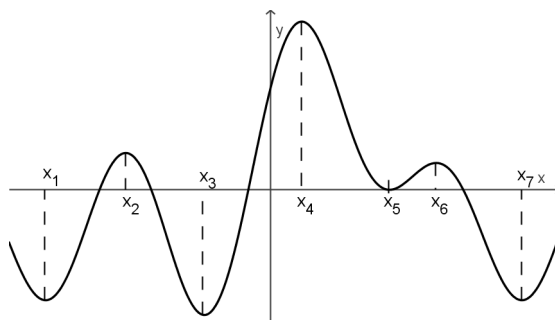
der Funktion, wenn es ein  $\epsilon > 0$  gibt, so dass für  $]x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon[$  mit  $x \neq x_E$  gilt:

$$f(x) < f(x_E)$$

$$f(x) > f(x_E)$$

Die Stelle  $x_E$  heißt Extremstelle. Der Punkt  $P(x_E|f(x_E))$  heißt Extrempunkt.

Globale Extremstellen



Bei  $f(x_3)$  und  $f(x_4)$  handelt es sich um globale Extrema. Das Extremum  $f(x_4)$  ist ein globales Maximum,  $f(x_3)$  ein globales Minimum.

Lokale Maxima sind  $f(x_2)$ ;  $f(x_4)$ ;  $f(x_6)$ .

Lokale Minima sind  $f(x_1)$ ;  $f(x_3)$ ;  $f(x_5)$ ;  $f(x_7)$ .

Die extremsten Funktionswerte einer Funktion im gesamten Definitionsbereich heißen globale Extrema.

### 3.2.1 Berechnung lokaler Extrempunkte

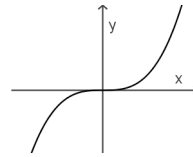
notwendige Bedingung:

Ist die Funktion  $f$  in ihrem Definitionsbereich differenzierbar und  $x_E \in D_f$  eine lokale Extremstelle, so gilt:

$$f'(x_E) = 0$$

Aber:

$$\begin{aligned}f(x) &= x^3 \\f'(x) &= 3x^2 \\f'(0) &= 0\end{aligned}$$



Die Funktion hat an der Stelle  $x = 0$  kein Extremum

hinreichende Bedingung:

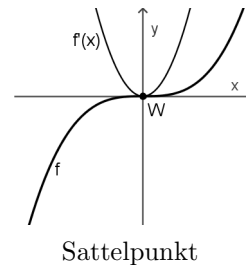
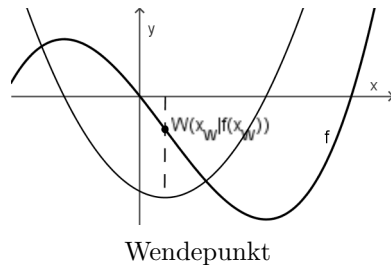
Die Funktion  $f$  sei im Definitionsbereich zweimal differenzierbar. So gilt für  $x_E \in D_f$ :

1.  $f'(x_E) = 0$  und  $f''(x_E) > 0$ , so hat  $f$  an der Stelle  $x_E$  ein lokales Minimum.
2.  $f'(x_E) = 0$  und  $f''(x_E) < 0$ , so hat  $f$  an der Stelle  $x_E$  ein lokales Maximum.

### 3.3 Wendepunkte einer Funktion

Definition:

Ist die Funktion  $f$  im Definitionsbereich differenzierbar und hat  $f'$  an der Stelle  $x_W$  ( $x_W \in D_f$ ) einen Extrempunkt, so hat  $f$  an der Stelle  $x_W$  einen Wendepunkt.



#### 3.3.1 Berechnungen von Wendepunkten

notwendige Bedingung:

Ist die Funktion  $f$  in ihrem Definitionsbereich zweimal differenzierbar und besitzt  $f$  an der Stelle  $x_W$  einen Wendepunkt, so gilt:

$$f''(x_W) = 0$$

hinreichende Bedingung:

Ist die Funktion  $f$  in ihrem Definitionsbereich dreimal differenzierbar, so besitzt  $f$  an der Stelle  $x_W$  einen Wendepunkt, wenn gilt:

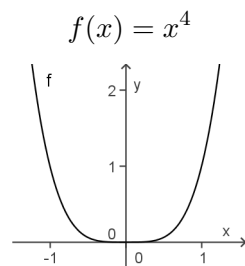
$$f''(x_W) = 0 \qquad f'''(x_W) \neq 0$$

Besonderheiten:

1. Sattelpunkt

Ein Punkt  $P(x|y)$  ist ein Sattelpunkt, wenn  $f'(x) = f''(x) = 0$  und  $f'''(x) \neq 0$ .

2. Wende- und Extrempunkte



$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 \\ f''(x) &= 12x^2 \\ f'''(x) &= 24x \\ f^{(4)}(x) &= 24 \end{aligned}$$

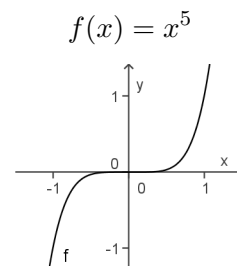
Es gilt:

$$\begin{aligned} f'(0) = 0 &= f''(0) = f'''(0) \\ f^{(4)} &= 24 \neq 0 \end{aligned}$$

→ Es liegt ein Extrempunkt vor.

Allgemein:

- Ist die Ableitung, die erstmalig  $\neq 0$  eine gerade, so handelt es sich um ein Extrempunkt.
- Ist die Ableitung, die erstmalig  $\neq 0$  eine ungerade, so handelt es sich um ein Wendepunkt.



$$\begin{aligned} f'(x) &= 5x^4 \\ f''(x) &= 20x^3 \\ f'''(x) &= 60x^2 \\ f^{(4)} &= 120x \\ f^{(5)} &= 120 \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} f'(0) = 0 &= f''(0) = f'''(0) = f^{(4)} \\ f^{(5)} &= 120 \neq 0 \end{aligned}$$

→ Es liegt ein Wendepunkt vor.

### 3. Wendetangente

Die Tangente im Wendepunkt heißt Wendetangente. Sie schneidet den Graph im Wendepunkt.

## 3.4 Weitere Eigenschaften von Funktionen

### 3.4.1 Verhalten im Unendlichen - schräge Asymptoten

Beispiel:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x \qquad g(x) = \frac{x^2 + 7x + 7}{x + 2}$$

Für beide Funktionen gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \pm\infty$$

Aber: Vergleicht man die Bilder beider Funktionen, so stellt man fest, dass die Funktionswerte von  $f$  schneller wachsen/fallen als die Funktionswerte von  $g$ . Die Funktion  $g$  nähert sich im unendlichen offensichtlich einer Geraden an, sie besitzt also eine schräge Asymptote. Die Gleichung für schräge Asymptoten ermittelt man durch Polynomdivision.

$$\begin{array}{r} (x^2 + 7x + 7) : (x + 2) = \underline{x + 5 - \frac{3}{x+2}} \\ - (x^2 + 2x) \\ \hline 5x + 7 \\ - 5x + 10 \\ \hline - 3 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \boxed{x+5} - \underbrace{\frac{3}{x+2}}_0$$

Die Funktion  $g$  hat eine schräge Asymptote mit der Gleichung  $y = x + 5$ .

### 3.4.2 Nullstellen, Polstellen, Lücken

- Ganzrationale Funktion:

Es gilt stets  $D = R \rightarrow$  Es gibt keine Polstellen bzw. Lücken.

Die Nullstellen werden durch Gleichsetzung des Funktionsterms mit 0 berechnet:  $f(x) = 0$

- Gebrochenrationale Funktion:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

Es gilt:

$$\begin{array}{llll} u(x) = 0 & \text{und} & v(x) \neq 0 & \rightarrow \text{Nullstelle } (x_0) \\ u(x) \neq 0 & \text{und} & v(x) = 0 & \rightarrow \text{Polstelle } (x_P) \\ u(x) = 0 & \text{und} & v(x) = 0 & \rightarrow \text{Lücke } (x_L) \end{array}$$

Besitzt eine Funktion  $f$  eine Polstelle  $x_0$ , so existiert dort eine senkrechte Asymptote.

### 3.4.3 Symmetrie

Man unterscheidet zwischen Achsensymmetrie und Punktsymmetrie.

Achsensymmetrie:

Sonderfall: Eine Funktion ist achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse, wenn für alle  $x \in D_f$  gilt:

$$f(x) = f(-x)$$

Allgemein: Eine Funktion ist achsensymmetrisch zur Geraden  $x = a$ , wenn für alle  $x \in D_f$  gilt:

$$f(a - x) = f(a + x)$$

### Punktsymmetrie:

Sonderfall: Eine Funktion ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung, wenn für alle  $x \in D_f$  gilt:

$$f(-x) = -f(x)$$

Allgemein: Eine Funktion ist punktsymmetrisch zum Punkt  $P(a|b)$ , wenn für alle  $x \in D_f$  gilt:

$$\frac{f(a-x) + f(a+x)}{2} = b$$

## 3.5 Vollständige Kurvenuntersuchung

Beispiel:

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$$

1. Definitionsbereich:

$$\{x|x \in \mathbb{R}\} = D_f$$

2. Symmetrie:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 + 6(-x)^2 + 9(-x) \\ &= -x^3 + 6x^2 - 9x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-x) &\neq f(x) && \rightarrow \text{keine Symmetrie zur } y\text{-Achse} \\ f(-x) &\neq -f(x) && \rightarrow \text{keine Symmetrie zum Ursprung} \end{aligned}$$

3. Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \underline{\underline{\pm\infty}}$$

4. Schnittpunkte:

$$\text{Nullstelle: } 0 = x^3 + 6x^2 + 9x$$

$$\underline{\underline{x_{0_1} = 0}}$$

$$\underline{\underline{x_{0_2} = -3}}$$

$$y\text{-Achse: } \underline{\underline{S_y(0|0)}}$$

5. Extrempunkte:

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 9$$

$$0 = 3x^2 + 12x + 9$$

$$x_{E_1} = -1 \quad ; \quad f''(-1) = 6 \quad \rightarrow \quad \text{lokales Minimum}$$

$$x_{E_2} = -3 \quad ; \quad f''(-3) = -6 \quad \rightarrow \quad \text{lokales Maximum}$$

$$\underline{\underline{P_{Min}(-1|-4)}} \quad \underline{\underline{P_{Max}(-3|0)}}$$

6. Wendepunkte:

$$f''(x) = 6x + 12$$

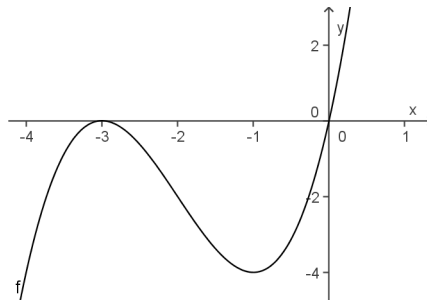
$$0 = 6x + 12$$

$$x_W = -2$$

$$f'''(x) = 6 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{Wendepunkt}$$

$$\underline{\underline{W(-2|-2)}}$$

7. Graph der Funktion:



### 3.6 Kurvenscharen

Beispiel:

$$f_t(x) = \frac{4}{x} - \frac{4t}{x^2} \quad (t \in \mathbb{R} \mid t \neq 0)$$

$$D_f \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 0\}$$

$$f_t(-x) = \frac{4}{-x} - \frac{4t}{(-x)^2} = -\frac{4}{x} - \frac{4t}{x^2}$$

$$\begin{aligned} f_t(-x) &\neq f_t(x) && \rightarrow \text{keine Symmetrie zur } y\text{-Achse} \\ f_t(-x) &\neq -f_t(x) && \rightarrow \text{keine Symmetrie zum Ursprung} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_t(x) = \underline{0} \quad \rightarrow \text{waagerechte Asymptote bei } y = 0$$

$$0 = \frac{4}{x_0} - \frac{4t}{x_0^2} \quad \rightarrow \underline{\underline{x_0 = t}}$$

$$\underline{\underline{x_P = 0}}$$

$$\begin{aligned} f'_t(x) &= -x^{-2} + 8tx^{-3} \\ 0 &= -\frac{4}{x^2} + \frac{8t}{x^3} \quad \rightarrow \underline{\underline{x_E = 2t}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''_t(x) &= 8x^{-3} - 24tx^{-4} \\ f''_t(2t) &= -\frac{1}{2t^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2t^3} &< 0, \text{ wenn } t > 0 && \rightarrow \text{lokales Maximum} \\ -\frac{1}{2t^3} &> 0, \text{ wenn } t < 0 && \rightarrow \text{lokales Minimum} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{E(2t \mid t^{-1})}}$$

$$0 = 8x^{-3} - 24tx^{-4} \quad \rightarrow \underline{\underline{x_W = 4t}}$$

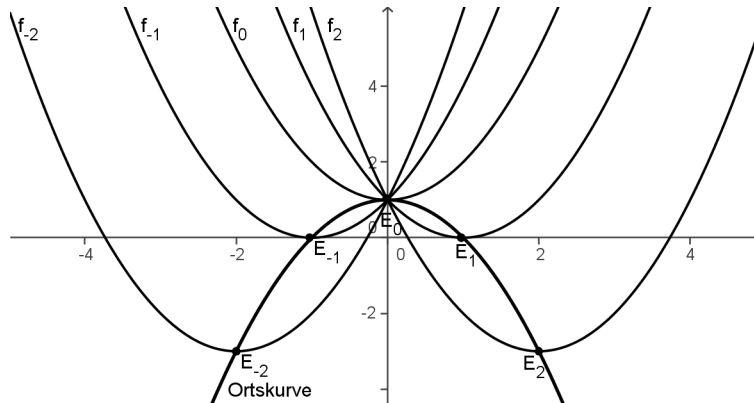
$$\begin{aligned} f'''_t(x) &= -24x^{-4} - 96tx^{-5} \\ f'''_t(4t) &= \frac{96}{1024t} \neq 0 \quad \rightarrow \underline{\underline{W(4t \mid \frac{3}{4t})}} \end{aligned}$$

#### 3.6.1 Ortskurven

Den Graphen, auf dem alle Extrempunkte (Wendepunkte,...) aller Kurven einer Schar liegen, nennt man Ortskurve der Extrempunkte (Wendepunkte,...) dieser Schar.

Beispiel:

$$f_k(x) = x^2 - 2kx + 1$$



Jede Kurve der Schar hat ein lokales Minimum bei  $P_{Min}(k | -k^2 + 1)$ .

Für den Minimumpunkt gilt:  $x = k$  und  $y = 1 - k^2$ . Durch Einsetzen der ersten in die zweite Gleichung ergibt sich die Gleichung der Ortskurve der Minimumpunkte:

$$\underline{\underline{y = 1 - x^2}}$$

### 3.7 Rekonstruktion von Funktionen

Beispiel:

Eine ganzrationale Funktion dritten Grades hat einen  $P_{Max}(-1|2)$ . Außerdem geht die Funktion durch  $P_2(-2|-1)$  und  $P_3(0|1)$ . Wie lautet die Funktionsgleichung? Die allgemeine Gleichung einer ganzrationalen Funktion dritten Grades lautet:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \end{aligned}$$

Es existieren vier Variablen, also benötigt man für eine eindeutige Lösung vier Gleichungen.

$$\begin{array}{lcl}
\text{I} & f(-1) = 2 & : & 2 = -a + b - c + d \\
\text{II} & f(-2) = -1 & : & -1 = -8a + 4b - 2c + d \\
\text{III} & f(0) = 1 & : & 1 = d \\
\text{IV} & f'(-1) = 0 & : & 0 = 3a - 2b + c
\end{array}$$


---

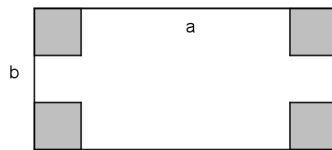
$$\begin{array}{lcl}
a = & 1 & c = -1 \\
b = & 1 & d = 1
\end{array}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 + x^2 - x + 1}}$$

### 3.8 Extremwertaufgaben

Beispiel:

Von einem rechteckigen Stück Blech mit einer Länge von  $a = 16$  cm und einer Breite von  $b = 10$  cm werden an den Ecken kongruente Quadrate ausgeschnitten und aus dem Rest eine Schachtel „gefaltet“. Wie muss man die Seitenlänge der auszuschneidenden Quadrate wählen, um eine Schachtel von größtem Rauminhalt zu erhalten? Wie groß ist dieser maximale Inhalt?



Man benötigt eine Formel für das Volumen eines Quaders:

$$V = e \cdot f \cdot g = (a - 2x)(b - 2x) \cdot x = (16 - 2x)(10 - 2x) \cdot x = 4x^3 - 52x^2 + 160x$$

$$D_f\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 0 < x < 5\}$$

Die sogenannte Zielfunktion wird nun abgeleitet und Maximum bestimmt.

$$\begin{aligned}
 V'(x) &= 12x^2 - 104x + 160 \\
 0 &= x^2 - \frac{26}{3}x + \frac{40}{3} \\
 x_1 &= 2 \quad x_2 = \frac{20}{3} \text{ entfällt, siehe } D_f
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V''(x) &= 24x - 104 \\
 V''(2) &= -56 < 0 \Rightarrow \text{Maximum}
 \end{aligned}$$

$$V(2) = \underline{\underline{144}}$$

Die Seiten der Quadrate müssen eine Länge von 2 cm besitzen, damit die Schachtel ein maximales Volumen von 144 cm<sup>2</sup> hat.

## 4 Integralrechnung

$$\begin{array}{ccc}
 f & \xrightarrow{\text{differenzieren}} & f' \\
 f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x - 3 & & f'(x) = x + 4 \\
 \\ 
 F & \xleftarrow{\text{integrieren}} & f \\
 F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + C & & f(x) = x + 4
 \end{array}$$

Die Integration ist die Umkehrung der Differentiation. Das Integrieren ist nicht eindeutig. Alle durch Integration von  $f$  entstehenden Funktion  $F$  unterscheiden sich durch einen konstanten Summanden  $C$ .  $F$  heißt Stammfunktion von  $f$ .

Definition:

Die Menge aller Stammfunktionen  $F$  einer Funktion  $f$  nennt man unbestimmtes Integral von  $f$ . Man schreibt:

$$\int f(x) dx = F(x) + C \tag{4.1}$$

## 4.1 Integrationsregeln

### 1. Potenzregel

Für jedes Intervall, in dem die Funktion  $f(x) = x^r$  ( $r \in \mathbb{R}$ ,  $r \neq -1$ ) stetig ist, gilt:

$$\int x^r dx = \frac{1}{r+1} \cdot x^{r+1} + C \quad (4.2)$$

### 2. Faktorregel

Für jedes Intervall, in dem die Funktion  $f(x) = k \cdot g(x)$  ( $k \in \mathbb{R}$ ,  $k \neq 0$ ) stetig ist, gilt:

$$\int [k \cdot g(x)] dx = k \cdot \int g(x) dx \quad (4.3)$$

### 3. Summenregel

Für jedes Intervall, in dem die Funktion  $f(x) = g(x) + h(x)$  stetig ist, gilt:

$$\int [g(x) + h(x)] dx = \int g(x) dx + \int h(x) dx \quad (4.4)$$

## 4.2 Integration durch lineare Substitution

Beispiel:

$$\begin{aligned} & \int (2x+1)^3 dx && \text{Substitution:} \\ = & \int z^3 \cdot \frac{1}{2} dz && 2x+1 = z \\ = & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} z^4 + C && \frac{dz}{dx} = 2 \\ = & \underline{\underline{\frac{1}{8}(2x+1)^4 + C}} && dx = \frac{dz}{2} \end{aligned}$$

### 4.3 Das bestimmte Integral

Es sei  $f$  eine im abgeschlossenen Intervall  $[a; b]$  definierte Funktion, die in jedem abgeschlossenen Teilintervall von  $[a; b]$  einen kleinsten Funktionswert  $f(\underline{x}_i)$  und einen größten Funktionswert  $f(\bar{x}_i)$  besitzt. Haben die beiden Folgen

$$s_n = \sum_{i=1}^{2^n} f(\underline{x}_i) \cdot \Delta x$$

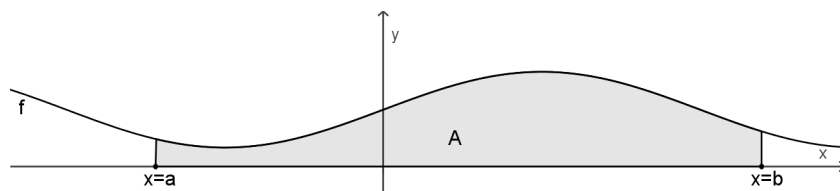
$$S_n = \sum_{i=1}^{2^n} f(\bar{x}_i) \cdot \Delta x$$

einen gemeinsamen Grenzwert, so heißt dieser gemeinsame Grenzwert bestimmtes Integral der Funktion  $f$  im Intervall  $[a; b]$ .

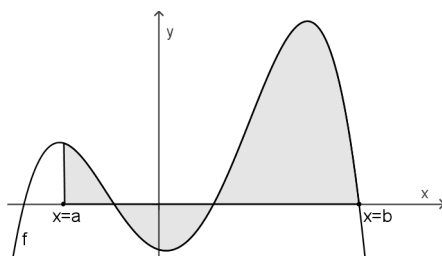
Kurz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b f(x) dx \quad (4.5)$$

Besitzt die Funktion  $f$  nur nichtnegative Funktionswerte, so entspricht der Wert des Integrals dem Inhalt der Fläche, die vom Graph der Funktion  $f$ , der  $x$ -Achse und den Geraden  $x = a$  und  $x = b$  begrenzt wird.



$$\int_a^b f(x) dx = A$$



$$\int_a^b f(x) dx \neq A$$

Ist die Funktion  $f$  im Intervall  $[a; b]$  stetig, so existiert  $\int_a^b f(x) dx$ .

Ist die Funktion  $f$  im Intervall  $[a; b]$  monoton, so existiert  $\int_a^b f(x) dx$ .

#### 4.4 Erweiterung des Integralbegriffs

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad (4.6)$$

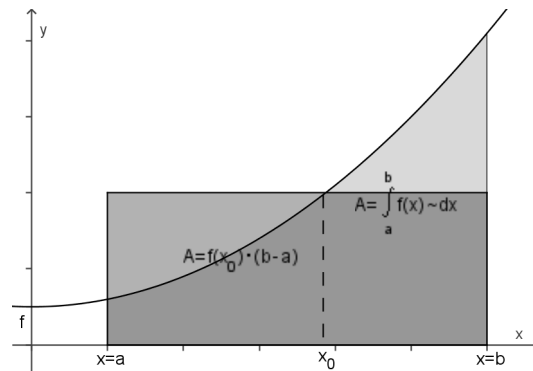
$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx \quad (4.7)$$

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx \quad (4.8)$$

#### 4.5 Mittelwertsatz der Integralrechnung

Ist  $f$  eine im Intervall  $[a; b]$  stetige Funktion, dann gibt es mindestens eine Zahl  $x_0$  mit  $a > x_0 > b$ , für deren Funktionswert gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = f(x_0) \cdot (b - a)$$



Beweis:

$m$  sei ein kleinster Funktionswert im Intervall  $[a; b]$ .

$M$  sei ein größter Funktionswert im Intervall  $[a; b]$ .

Es gilt:

$$m(b-a) < \int_a^b f(x) dx < M(b-a)$$

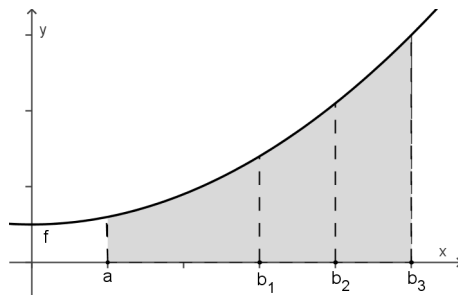
Da  $f$  im Intervall  $[a; b]$  stetig ist, existiert nach dem Zwischenwertsatz (siehe Abschnitt 2.2.5) jeder Funktionswert zwischen  $m$  und  $M$  mindestens einmal. Also existiert ein Zahl  $\mu$  mit  $m < \mu < M$ , so dass gilt:

$$\mu(b-a) = \int_a^b f(x) dx$$

Mit  $\mu = f(x_0)$  folgt:

$$f(x_0) \cdot (b-a) = \int_a^b f(x) dx$$

#### 4.6 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung



$$A = \int_a^b f(x) dx$$

Lässt man die linke Grenze  $a$  des Intervalls fest und verschiebt die rechte Grenze  $b$ , so bilden die geordneten Paare

$$\left( b \mid \int_a^b f(x) dx \right)$$

ein Funktion. Durch Umbenennen der Variablen entsteht:

$$\left( x \mid \int_a^x f(t) dt \right)$$

Definition:

Gegeben sei ein Funktion  $f$ . Die Funktion  $\phi(x)$ , die jedem  $x$  den Wert des Integrals  $\int_a^x f(t) dt$  zuordnet, heißt Integralfunktion von  $f$ .  $f(t)$  heißt Integrand. Für eine im Intervall  $[a; b]$  stetige Funktion ist die Funktion  $\phi$  mit  $\phi(x) = \int_a^x f(t) dt$  eine Stammfunktion von  $f$  im Intervall  $[a; b]$ .

Wenn  $\phi(x)$  eine Stammfunktion von  $f(x)$  ist, so gibt es unendlich viele weitere Stammfunktionen  $F(x)$ .

$$\begin{aligned}\phi(x) &= F(x) + C \\ \int_a^x f(t) dt &= F(x) + C\end{aligned}$$

Für  $x = a$  gilt:

$$\begin{aligned}\int_a^a f(t) dt &= F(a) + C = 0 \\ c &= -F(a) \quad (*)\end{aligned}$$

Für  $x = b$  gilt:

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) + C \quad (**)$$

Durch Einsetzen von (\*) in (\*\*) ergibt sich:

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

Durch erneutes Umbenennen der Variablen ergibt sich der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

Ist  $f$  eine im Intervall  $[a; b]$  stetige Funktion und  $F$  eine zu  $f$  gehörige Stammfunktion, so gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (4.9)$$

## 5 Anwendung der Integralrechnung

### 5.1 Flächenberechnungen

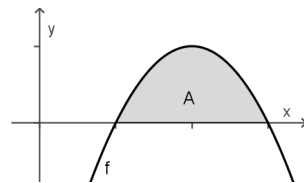
$\int_a^b f(x) dx$  entspricht im allgemeinen nicht einem Flächeninhalt.

#### 5.1.1 Die Fläche liegt vollständig oberhalb der Abszissenachse

Beispiel:

$$f(x) = -x^2 + 4x - 3$$

Der Graph der Funktion  $f$  und die  $x$ -Achse begrenzen eine Fläche vollständig. Wie groß ist deren Inhalt  $A$ ?



Die Nullstellen entsprechen den Integrationsgrenzen.

$$\begin{aligned} 0 &= -x^2 + 4x - 3 \\ x_1 &= 1 \\ x_2 &= 3 \end{aligned}$$

Für den Flächeninhalt  $A$  folgt:

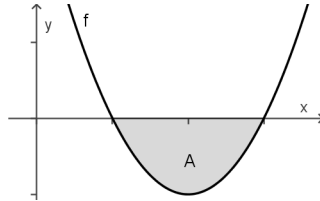
$$\begin{aligned} A &= \int_1^3 f(x) dx \\ &= \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx \\ &= \left[ -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x \right]_1^3 \\ &= -9 + 18 - 9 - \left( -\frac{1}{3} + 2 - 3 \right) \\ A &= \underline{\underline{\frac{4}{3}}} \end{aligned}$$

### 5.1.2 Die Fläche liegt vollständig unterhalb der Abszissenachse

Beispiel:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 8$$

Der Graph der Funktion  $f$  und die  $x$ -Achse begrenzen eine Fläche vollständig. Wie groß ist deren Inhalt  $A$ ?



Die Nullstellen entsprechen den Integrationsgrenzen.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}x^2 + 3x - 8 \\ x_1 &= 2 \\ x_2 &= 8 \end{aligned}$$

Für den Flächeninhalt  $A$  folgt:

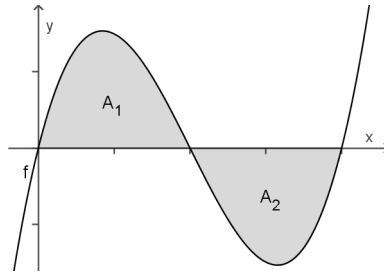
$$\begin{aligned} A &= \int_2^{-8} f(x) dx \quad \text{oder} \quad A = \left| \int_{-8}^2 f(x) dx \right| \\ &= \left[ \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 8x \right]_2^{-8} \\ A &= \underline{\underline{\frac{250}{3}}} \end{aligned}$$

### 5.1.3 Die Fläche wird von der Abszissenachse geteilt

Beispiel:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$$

Der Graph der Funktion  $f$  und die  $x$ -Achse begrenzen eine Fläche (, die aus mehreren Teilflächen besteht) vollständig. Wie groß ist deren Inhalt  $A$ ?



$$A = A_1 + A_2$$

Die Nullstellen entsprechen den Integrationsgrenzen.

$$\begin{aligned} 0 &= x^3 - 6x^2 + 8x \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= 2 \\ x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Für den Flächeninhalt  $A$  folgt:

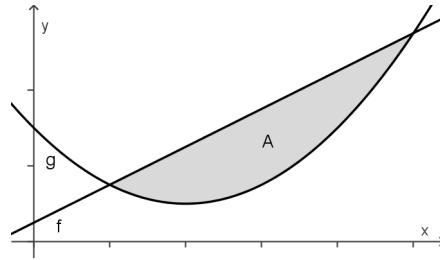
$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx \\ &= \left[ \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2 \right]_0^2 + \left[ \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2 \right]_2^4 \\ A &= \underline{\underline{8}} \end{aligned}$$

#### 5.1.4 Die Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen

Beispiel:

$$f(x) = 2x + 1 \qquad g(x) = x^2 - 4x + 6$$

Die Graphen der Funktionen  $f$  und  $g$  schließen eine Fläche ein. Wie groß ist deren Inhalt  $A$ ?



Die Schnittstellen der Funktionen entsprechen den Integrationsgrenzen.

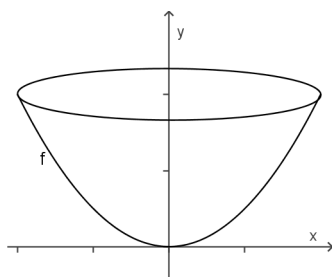
$$\begin{aligned} 2x + 1 &= x^2 - 4x + 6 \\ x_1 &= 1 \\ x_2 &= 5 \end{aligned}$$

Für den Flächeninhalt  $A$  folgt:

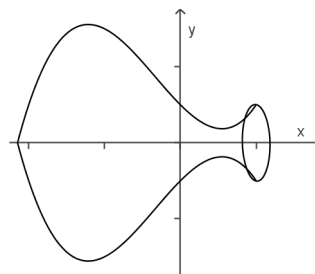
$$\begin{aligned} A &= \int_1^5 f(x) \, dx - \int_1^5 g(x) \, dx \\ &= \int_1^5 f(x) - g(x) \, dx \\ &= \left[ -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x \right]_1^5 \\ A &= \underline{\underline{\frac{32}{3}}} \end{aligned}$$

## 5.2 Volumen von Rotationskörpern

Rotiert ein endliches Kurvenstück um eine Achse, so entsteht dabei ein Rotationskörper.



Rotation um die  $y$ -Achse

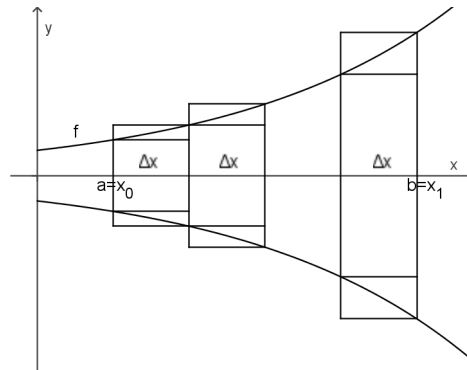


Rotation um die  $x$ -Achse

Der Graph der Funktion heißt erzeugende Kurve.

### 5.2.1 Rotation um die Abszissenachse

Der Rauminhalt des Rotationskörpers auf der x-Achse im Intervall  $[a; b]$  wird in  $n$  kleine Zylinderscheiben mit der Querschnittsfläche  $\pi r^2$  und der Höhe  $h = \Delta x = \frac{b-a}{n}$  zerlegt. Der Radius  $r$  entspricht dem Funktionswert  $f(x_i)$ .



Zerlegung in  $n$  Zylinderscheiben

Es folgt für die Teilvolumina:

$$V_i = \pi \cdot (f(x_i))^2 \cdot \Delta x$$

Es werden die Teilvolumina summiert. Der gemeinsame Grenzwert der Unter- und Ober- summe entspricht dem Volumen des Rotationskörpers.

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} \pi (f(x_i))^2 \cdot \Delta x$$

$$S_n = \sum_{i=1}^n \pi (f(x_i))^2 \cdot \Delta x$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = V$$

Somit ergibt sich:

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx \quad (5.1)$$

## 5.2.2 Rotation um die Ordinatenachse

Durch Bilden der Umkehrfunktion, wird die Rotation um die  $y$ -Achse auf die Rotation um die  $x$ -Achse zurückgeführt.

$$V_y = \pi \cdot \int_{f(a)}^{f(b)} (f^{-1}(y))^2 dy \quad (5.2)$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}x^2 & [0; 1] \\ x &= \sqrt{2y} \end{aligned}$$

$$f(0) = 0$$

$$f(1) = \frac{1}{2}$$

$$V_y = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} (\sqrt{2y})^2 dy = \pi [y^2]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$V_y = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$$

## 5.3 Weitere Integrationsregeln

### 5.3.1 Allgemeine Substitutionsregel

1. Regel:

$$\int (f(g(x)) \cdot g'(x)) dx = \int f(t) dt \quad \text{mit} \quad t = g(x) \quad (5.3)$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} & \int \boxed{2x} \cdot (x^2 + 4)^3 \boxed{dx} && \text{Substitution:} \\ = & \int t^3 dt && 2x + 4 = t \\ = & \frac{1}{4} t^4 + C && \frac{dt}{dx} = 2x \\ = & \underline{\underline{\frac{1}{4} (2x^2 + 4)^4 + C}} && dt = \boxed{2x dx} \end{aligned}$$

2. Regel:

$$\int f(x) dx = \int (f(g(t)) - g'(t)) dx \quad \text{mit} \quad x = g(t) \quad (5.4)$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} & \int \frac{x}{(1-x)^4} dx && \text{Substitution:} \\ = & \int (1-t) \cdot t^{-4} (-dt) && t = 1-x \\ = & \int -t^{-4} + t^{-3} dt && x = 1-t \\ = & \frac{1}{3} t^{-3} - \frac{1}{2} t^{-2} + C && \frac{dt}{dx} = -1 \\ = & \underline{\underline{\frac{1}{3} (1-x)^{-3} - \frac{1}{2} (1-x)^{-2} + C}} && dx = -dt \end{aligned}$$

## 5.4 Partielle Integration

Aus der Produktregel (2.6) der Differentiation folgt:

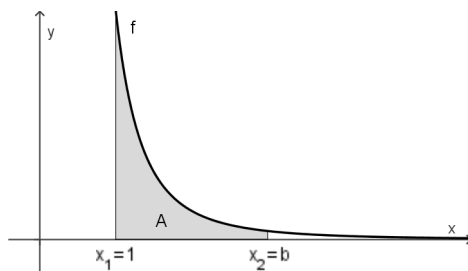
$$\begin{aligned} (u(x) \cdot v(x))' &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ \int (u(x) \cdot v(x))' dx &= \int (u'(x) \cdot v(x)) dx + \int (u(x) \cdot v'(x)) dx \\ u(x) \cdot v(x) &= \int (u'(x) \cdot v(x)) dx + \int (u(x) \cdot v'(x)) dx \\ \int (u'(x) \cdot v(x)) dx &= u(x) \cdot v(x) - \int (u(x) \cdot v'(x)) dx \end{aligned} \quad (5.5)$$

## 5.5 Uneigentliche Integrale

Beispiel:

$$f(x) = \frac{1}{x^3}$$

Der Graph der Funktion, die  $x$ -Achse und die Geraden  $x_1 = 1$  und  $x_2 = b$  ( $b > 1$ ) begrenzen eine Fläche vollständig. Wie groß kann der Flächeninhalt maximal werden?



Definition:

Ist  $f$  eine in jedem Intervall  $[a; b]$  ( $b \rightarrow \infty$ ) stetige Funktion und existiert der Grenzwert

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

, so bezeichnet man diesen Grenzwert als uneigentliches Integral der Funktion  $f$  im Intervall  $[a; \infty]$  und schreibt:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \quad (5.6)$$

im Beispiel:

$$\begin{aligned} A(b) &= \int_1^b x^{-3} dx \\ &= \left[ -\frac{1}{2} x^{-2} \right] \\ &= -\frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2} \right) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

## 6 Exponential-, Logarithmus- und Winkelfunktionen

### 6.1 Differentiation der Exponentialfunktionen

Beispiel:

$$\begin{aligned}f(x) &= 2^x \\f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2^{0+h} - 2^0}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2^0 \cdot 2^h - 2^0}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2^h - 1}{h}\end{aligned}$$

Durch Einsetzen kleiner Zahlen für  $h$  findet man:

$h$	0,1	0,01	0,001	0,0001
$f'(0)$	0,718	0,696	0,693	0,693

Für  $f(x) = 2^x$  gilt:

$$f'(0) \approx 0,693$$

Wie groß ist  $f'(x_0)$ ?

$$\begin{aligned}f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2^{x_0+h} - 2^{x_0}}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2^{x_0} \cdot (2^h - 1)}{h} \\&= 2^{x_0} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2^h - 1}{h} \\&\approx 2^{x_0} \cdot 0,693\end{aligned}$$

### 6.1.1 Die Eulersche Zahl

Es gibt genau eine Zahl  $e$  ( $e \in \mathbb{R}$ ), für die gilt:

$$(e^x)' = e^x$$

Diese Zahl heißt Eulersche Zahl.

Berechnung der Zahl  $e$ :

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} &= 1 \\ \frac{e^h - 1}{h} &\approx 1 && \text{(wenn } h \text{ sehr klein)} \\ e^h &\approx h + 1 \\ e^{\frac{1}{n}} &\approx \frac{1}{n} + 1 && \text{(wenn } n \text{ sehr groß)} \\ e &\approx \left(\frac{1}{n} + 1\right)^n \\ e &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + 1\right)^n && (6.1) \\ e &\approx 2,718281828\dots\end{aligned}$$

### 6.1.2 Ableitung einer beliebigen Exponentialfunktionen

Es gilt:

$$f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^x \quad (6.2)$$

Für  $f(x) = a^x$  gilt somit:

$$\begin{aligned}f(x) &= a^x = e^{\log_e a^x} = e^{\ln a^x} = e^{x \cdot \ln a} \\ \rightarrow f'(x) &= e^{x \cdot \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a\end{aligned}$$

Für eine beliebige Exponentialfunktion  $f(x) = a^x$  ( $a > 0$ ) gilt:

$$f'(x) = a^x \cdot \ln a \quad (6.3)$$

### 6.1.3 Kurvenuntersuchung für Exponentialfunktionen

Beispiel:

$$f(x) = x \cdot e^{1-x}$$

$$D_f \{x \in \mathbb{R}\}$$

$$f(-x) = -x \cdot e^{1+x}$$

$$f(-x) \neq f(x) \quad \rightarrow \text{keine Symmetrie zur } y\text{-Achse}$$

$$f(-x) \neq -f(x) \quad \rightarrow \text{keine Symmetrie zum Ursprung}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \underline{0} \quad \rightarrow \text{waagerechte Asymptote bei } y = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \underline{\underline{-\infty}}$$

$$0 = x_0 \cdot e^{1-x_0} \quad \rightarrow \underline{\underline{x_0 = 0}}$$

$$f'(x) = e^{1-x} \cdot (1-x)$$

$$0 = e^{1-x} \cdot (1-x) \quad \rightarrow \underline{\underline{x_E = 1}}$$

$$f''(x) = e^{1-x} \cdot (x-2)$$

$$f''(1) = -1 < 0 \quad \rightarrow \text{lokales Maximum}$$

$$\underline{\underline{P_{Max}(1 | 1)}}$$

$$0 = e^{1-x} \cdot (x-2) \quad \rightarrow \underline{\underline{x_W = 2}}$$

$$f'''(2) \neq 0 \quad \rightarrow \underline{\underline{W(2 | \frac{2}{e})}}$$

## 6.2 Integration der Exponentialfunktionen

Aus den Differentiationsregeln folgt:

$$\int e^x dx = e^x + C \quad (6.4)$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x + C \quad (6.5)$$

### 6.3 Differentiation der Logarithmusfunktionen

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \log_a x \\
 f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x_0 + h) - \log_a x_0}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{h} \cdot \log_a \left( \frac{x_0 + h}{x_0} \right) \right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x_0} \cdot \frac{x_0}{h} \cdot \log_a \left( 1 + \frac{h}{x_0} \right) \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x_0} \cdot n \cdot \log_a \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{x_0} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \log_a \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right) \\
 &= \frac{1}{x_0} \cdot \log_a \underbrace{\left( \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)}_e \\
 &= \frac{1}{x_0} \cdot \log_a e \\
 &= \frac{1}{x_0} \cdot \frac{1}{\ln a}
 \end{aligned}$$

Die Funktion  $f(x) = \log_a x$  ist differenzierbar und es gilt:

$$f'(x) = \frac{1}{x_0 \cdot \ln a} \quad (6.6)$$

#### 6.3.1 Kurvenuntersuchung für Logarithmusfunktionen

Beispiel:

$$f(x) = x^2 \cdot (\ln x - 1)$$

$$D_f \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

keine Symmetrie, siehe  $D_f$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \underline{+\infty} \\
 0 &= x_0^2 \cdot (\ln x_0 - 1) \rightarrow \underline{\underline{x_0 = e}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= x(2 \ln x - 1) \\
 0 &= x(2 \ln x - 1) \rightarrow x_E = 0 \text{ entfällt, siehe } D_f \\
 &\quad \underline{\underline{x_E = \sqrt{e}}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= 2 \ln x + 1 \\
 f''(\sqrt{e}) &= 2 > 0 \rightarrow \text{lokales Minimum}
 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{P_{Min}(\sqrt{e} \mid -\frac{1}{2}e)}}$$

$$0 = 2 \ln x + 1 \rightarrow \underline{\underline{x_W = \frac{1}{\sqrt{e}}}}$$

$$\begin{aligned}
 f'''(x) &= \frac{2}{x} \\
 f'''(\frac{1}{\sqrt{e}}) &= 2\sqrt{e} \neq 0 \rightarrow \underline{\underline{W(e^{-\frac{1}{2}} \mid -\frac{3}{2e})}}
 \end{aligned}$$

## 6.4 Integration der Logarithmusfunktionen

$$\int \ln x \, dx$$

Partielle Integration:

$$\begin{aligned}
 &= \int 1 \cdot \ln x \, dx \\
 &= x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx \\
 &= x \cdot \ln x - x + C \\
 \int \ln x \, dx &= x(\ln x - 1) + C \tag{6.7}
 \end{aligned}$$

## 6.5 Winkelfunktionen

	Sinus ( $\sin x$ )	Kosinus ( $\cos x$ )	Tangens ( $\tan x$ )
Db	$\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$	$\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$	$\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \neq (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}\}$
Wb	$\{y \mid y \in \mathbb{R}; -1 \leq y \leq 1\}$	$\{y \mid y \in \mathbb{R}; -1 \leq y \leq 1\}$	$\{y \mid y \in \mathbb{R}\}$
kl. Periode	$2\pi$	$2\pi$	$\pi$
Symmetrie	Punktsymm. zu (0 0)	Achsens. zur $y$ -Achse	Punktsymm. zu (0 0)
Nullstellen	$k \cdot \pi \ (k \in \mathbb{Z})$	$(2k+1) \cdot (\frac{\pi}{2}) \ (k \in \mathbb{Z})$	$k \cdot \pi \ (k \in \mathbb{Z})$

## 6.5.1 Differentiation der Winkelfunktionen

### 1. Sinusfunktion

$$\begin{aligned}f(x) &= \sin x \\f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x_0 \cdot \cos h + \cos x_0 \cdot \sin h - \sin x_0}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x_0 \cdot (\cos h - 1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x_0 \cdot \sin h}{h} \\&= \sin x_0 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos h - 1)}{h} + \cos x_0 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \\&= \sin x_0 \cdot 0 + \cos x_0 \cdot 1 \\&= \cos x_0\end{aligned}$$

Die Funktion  $f(x) = \sin x$  ist im gesamten Definitionsbereich differenzierbar und es gilt:

$$f'(x) = \cos x \tag{6.8}$$

### 2. Kosinusfunktion

Aus der Beziehung  $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$  folgt für  $f(x) = \cos x$ :

$$\begin{aligned}f'(x) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1) \\f'(x) &= -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\f'(x) &= -\sin x\end{aligned}$$

Die Funktion  $f(x) = \cos x$  ist im gesamten Definitionsbereich differenzierbar und es gilt:

$$f'(x) = -\sin x \tag{6.9}$$

## 6.5.2 Kurvenuntersuchung für Winkelfunktionen

Beispiel:

$$f(x) = 2 \sin x + \sin(2x) \quad [-2\pi; 2\pi]$$

$$D_f \{x \in \mathbb{R}\}$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= 2 \sin(-x) + \sin(-2x) \\ &= -2 \sin(x) - \sin(2x) \\ &= -(2 \sin(x) + \sin(2x)) \end{aligned}$$

$$f(-x) = -f(x) \quad \rightarrow \text{Symmetrie zu Ursprung}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \sin x + \sin(2x) \\ &= 2 \sin x + 2 \sin x \cdot \cos x \\ &= 2 \sin x \cdot (1 + \cos x) \\ &= \sin x \end{aligned}$$

$$\rightarrow \underline{\underline{x_{01} = -2\pi; x_{02} = -\pi}}$$

$$\underline{\underline{x_{03} = 0; x_{04} = \pi}}$$

$$\underline{\underline{x_{05} = 2\pi}}$$

$$0 = 1 + \cos x$$

$$\rightarrow \underline{\underline{x_{02} = -\pi; x_{04} = \pi}}$$

$$f'(x) = 2 \cos x + \cos(2x) \cdot 2$$

$$0 = 2 \cos x + 4 \cos^2 x - 2 \quad \cos x = a$$

$$0 = 4a^2 + 2a - 2 \quad \rightarrow a_1 = 0,5; a_2 = -1$$

$$\cos x = 0,5 \quad \rightarrow \underline{\underline{x_{E1} = \frac{\pi}{3}; x_{E2} = -\frac{\pi}{3}}}$$

$$\underline{\underline{x_{E3} = \frac{5}{3}\pi; x_{E4} = -\frac{5}{3}\pi}}$$

$$\cos x = -1$$

$$\rightarrow \underline{\underline{x_{E5} = \pi; x_{E6} = -\pi}}$$

$$f''\left(-\frac{5}{3}\pi\right) = -5,2$$

$\rightarrow$  lokales Maximum

$\rightarrow \frac{5}{3}\pi$  - lokales Minimum

$$f''\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 5,2$$

$\rightarrow$  lokales Minimum

$\rightarrow \frac{\pi}{3}$  - lokales Maximum

$$f''(\pi) = 0$$

$\rightarrow$  nicht existent

$$\underline{\underline{P_{Max1}\left(-\frac{5}{3}\pi \mid 2,6\right)}}$$

$$\underline{\underline{P_{Min1}\left(\frac{5}{3}\pi \mid -2,6\right)}}$$

$$\underline{\underline{P_{Max2}\left(\frac{\pi}{3} \mid 2,6\right)}}$$

$$\underline{\underline{P_{Min2}\left(-\frac{\pi}{3} \mid -2,6\right)}}$$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= -2 \sin x - 4 \sin(2x) \\
0 &= -2 \sin x - 8 \sin x \cdot \cos x \\
0 &= -2 \sin x(-1 - 4 \cos x) \\
0 &= 2 \sin x &\rightarrow \underline{\underline{x_{W_1} = -2\pi; x_{W_2} = -\pi}} \\
&&\underline{\underline{x_{W_3} = 0; x_{W_4} = \pi}} \\
&&\underline{\underline{x_{W_5} = 2\pi}} \\
0 &= -1 - 4 \cos x &\rightarrow \underline{\underline{x_{W_6} \approx 1,82; x_{W_7} \approx -1,82}} \\
&&\underline{\underline{x_{W_8} \approx 4,46; x_{W_4} \approx -4,46}}
\end{aligned}$$

$x_{W_1}$  und  $x_{W_5}$  sind Randpunkte des Definitionsbereiches und somit keine Wendepunkte.

$$\begin{aligned}
f'''(-\pi) &= -6 \neq 0 &\rightarrow \underline{\underline{W_1(-\pi | 0) \rightarrow W_2(\pi | 0)}} \\
f'''(0) &= -10 \neq 0 &\rightarrow \underline{\underline{W_3(0 | 0)}} \\
f'''(1,82) &= 7,5 \neq 0 &\rightarrow \underline{\underline{W_5(1,82 | 1,46)}} \\
&&\rightarrow \underline{\underline{W_6(-1,82 | -1,46)}} \\
f'''(4,46) &= 7,5 \neq 0 &\rightarrow \underline{\underline{W_7(4,46 | -1,46)}} \\
&&\rightarrow \underline{\underline{W_8(-4,46 | 1,46)}}
\end{aligned}$$

### 6.5.3 Integration der Winkelfunktionen

Aus den Ableitungsregeln für Winkelfunktionen folgt:

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C \quad (6.10)$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C \quad (6.11)$$

Für den Tangens gilt:

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx$$

$$\cos x = t$$

$$\frac{dt}{dx} = -\sin x$$

$$-dt = \sin x \, dx$$

$$\begin{aligned}\int -\frac{1}{|t|} &= -\ln|t| + C \\ \int \tan x \, dx &= -\ln|\cos x| + C\end{aligned}\tag{6.12}$$