

# Analysis 21

www.schulmathe.npage.de

## Aufgaben

Für jede reelle Zahl  $k$  mit  $k > 0$  ist eine Funktion  $f_k$  gegeben durch

$$f_k(x) = \frac{2e^{2x}}{k + e^{2x}} \quad (x \in \mathbb{R})$$

- a) Untersuchen Sie den Graphen der Funktion  $f_k$  auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, auf lokale Extrempunkte sowie auf Wendepunkte. Geben Sie gegebenenfalls deren Koordinaten an. Geben Sie die Asymptoten des Graphen der Funktion  $f_k$  an. Skizzieren Sie den Graphen  $f_1$  und  $f_2$  in ein und dasselbe Koordinatensystem.
- b) Weisen Sie durch Integration nach, dass die Funktion  $F_k$  mit der Gleichung

$$F_k(x) = \ln(k + e^{2x})$$

eine Stammfunktion von  $f_k$  ist.

- c) Die Koordinatenachsen, der Graph  $f_2$  und die Gerade  $x = \frac{\ln 2}{2}$  begrenzen eine Fläche  $A_1$  vollständig. Die  $x$ -Achse, der Graph von  $f_2$ , die Gerade  $x = \frac{\ln 2}{2}$  und die Gerade  $x = u$  mit  $u > \frac{\ln 2}{2}$  begrenzen eine Fläche  $A_2$  vollständig. Berechnen Sie  $u$  für den Fall, dass  $A_1 = A_2$ .

## Lösungen

a) An den Nullstellen ist der Funktionswert  $f_k(x) = 0$ :

$$\begin{aligned}0 &= \frac{2e^{2x}}{k + e^{2x}} \\0 &= e^{2x}\end{aligned}$$

Es existieren keine Nullstellen.

Zur Bestimmung des Schnittpunktes mit der  $y$ -Achse wird der Funktionswert  $f_k(0)$  untersucht:

$$f_k(0) = \frac{2e^0}{k + e^0} = \frac{2}{k + 1}$$

Der Graph der Funktion  $f_k$  schneidet die  $y$ -Achse im Punkt  $S_y \left( 0 \mid \frac{2}{k + 1} \right)$ .

Zur Bestimmung der Extrema wird die erste Ableitung  $f'_k$  auf Nullstellen untersucht:

$$\begin{aligned}f_k(x) &= \frac{2e^{2x}}{k + e^{2x}} \\f'_k(x) &= \frac{4e^{2x} \cdot (k + e^{2x}) - 2e^{2x} \cdot 2e^{2x}}{(k + e^{2x})^2} \\&= \frac{4e^{2x} \cdot k}{(k + e^{2x})^2} \\0 &= 4e^{2x} \cdot k \\0 &= e^{2x}\end{aligned}$$

Es existieren keine lokalen Extrema.

Zur Bestimmung der Wendepunkte wird die zweite Ableitung  $f_k''$  auf Nullstellen untersucht:

$$f_k'(x) = \frac{4e^{2x} \cdot k}{(k + e^{2x})^2}$$

$$f_k''(x) = \frac{8e^{2x} \cdot k \cdot (k + e^{2x})^2 - 4e^{2x} \cdot k \cdot 2 \cdot (k + e^{2x}) \cdot 2e^{2x}}{(k + e^{2x})^4}$$

$$= \frac{8e^{2x} \cdot k \cdot (k + e^{2x}) - 16e^{4x} \cdot k}{(k + e^{2x})^3}$$

$$= \frac{8e^{2x} \cdot k^2 - 8e^{4x} \cdot k}{(k + e^{2x})^3}$$

$$0 = 8e^{2x} \cdot k^2 - 8e^{4x} \cdot k$$

$$0 = e^{2x} \cdot (k - e^{2x})$$

$$0 = k - e^{2x}$$

$$\ln k = 2x$$

$$x = \frac{1}{2} \ln k$$

Zur Prüfung der tatsächlichen Existenz der Wendestelle wird die dritte Ableitung an dieser Stelle  $f_k''' \left( \frac{1}{2} \ln k \right)$  untersucht:

$$f_k''(x) = \frac{8e^{2x} \cdot k^2 - 8e^{4x} \cdot k}{(k + e^{2x})^3}$$

$$f_k'''(x) = \frac{(16e^{2x} \cdot k^2 - 32e^{4x} \cdot k) \cdot (k + e^{2x})^3 - (8e^{2x} \cdot k^2 - 8e^{4x} \cdot k) \cdot 3 \cdot (k + e^{2x})^2 \cdot 2e^{2x}}{(k + e^{2x})^6}$$

$$= \frac{(16e^{2x} \cdot k^2 - 32e^{4x} \cdot k) \cdot (k + e^{2x}) - (8e^{2x} \cdot k^2 - 8e^{4x} \cdot k) \cdot 6e^{2x}}{(k + e^{2x})^4}$$

$$= \frac{16e^{6x} \cdot k - 64e^{4x} \cdot k^2 + 16e^{2x} \cdot k^3}{(k + e^{2x})^4}$$

$$= \frac{16e^{2x} \cdot k \cdot (e^{4x} - 4e^{2x} \cdot k + k^2)}{(k + e^{2x})^4}$$

$$\begin{aligned}
f_k''' \left( \frac{1}{2} \ln k \right) &= \frac{16e^{\ln k} \cdot k \cdot (e^{2 \ln k} - 4e^{\ln k} \cdot k + k^2)}{(k + e^{\ln k})^4} \\
&= \frac{16k^2 \cdot (k^2 - 4k^2 + k^2)}{(2k)^4} \\
&= -2 \neq 0
\end{aligned}$$

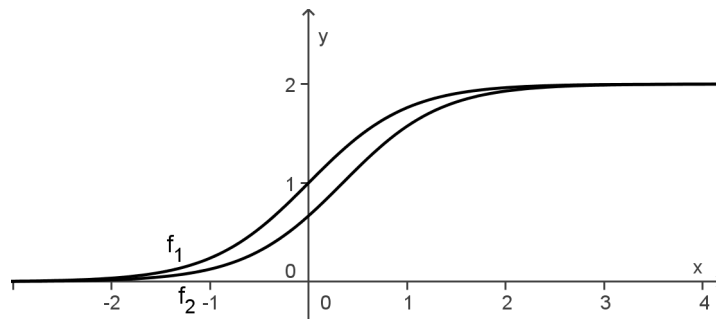
Der Punkt  $W \left( \frac{1}{2} \ln k \mid 1 \right)$  ist ein Wendepunkt des Graphen der Funktion  $f_k$ .

Es existieren keine Polstellen. Zur Bestimmung der waagerechten Asymptoten wird der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_k(x)$  untersucht:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{2x}}{k + e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{2x}}{e^{2x} \cdot \left( \frac{k}{e^{2x}} + 1 \right)} = \frac{2}{0 + 1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^{2x}}{k + e^{2x}} = \frac{0}{k + 0} = 0$$

Die Geraden  $y = 0$  und  $y = 2$  sind Asymptoten des Graphen der Funktion  $f_k$ .



b) Zur Bestimmung der Stammfunktion  $F_k$  wird die Funktion  $f_k$  integriert:

$$F_k(x) = \int \frac{2e^{2x}}{k + e^{2x}} dx$$

Aus der Substitution  $t = k + e^{2x}$  folgt:

$$\begin{aligned}t &= k + e^{2x} \\ \frac{dt}{dx} &= 2e^{2x} \\ dx &= \frac{dt}{2e^{2x}}\end{aligned}$$

Eingesetzt ergibt sich weiter:

$$\begin{aligned}&\int \frac{2e^{2x}}{t} \cdot \frac{dt}{2e^{2x}} \\ &= \frac{1}{t} dt \\ &= \ln |t| + C \\ F_k(x) &= \ln(k + e^{2x}) + C\end{aligned}$$

- c) Zur Bestimmung des Flächeninhalts  $A_1$  wird die Funktion  $f_2$  in den Grenzen  $x_1 = 0$  und  $x_2 = \frac{\ln 2}{2}$  integriert. Es gilt der Hauptsatz der Integralrechnung:

$$A_1 = F_2\left(\frac{\ln 2}{2}\right) - F_2(0)$$

Zur Bestimmung des Flächeninhalts  $A_2$  wird die Funktion  $f_2$  in den Grenzen  $x_1 = \frac{\ln 2}{2}$  und  $x_2 = u$  integriert. Es gilt der Hauptsatz der Integralrechnung:

$$A_2 = F_2(u) - F_2\left(\frac{\ln 2}{2}\right)$$

Durch Gleichsetzen der Flächeninhalte  $A_1 = A_2$  ergibt sich weiter:

$$\begin{aligned}F_2\left(\frac{\ln 2}{2}\right) - F_2(0) &= F_2(u) - F_2\left(\frac{\ln 2}{2}\right) \\ 2 \cdot F_2\left(\frac{\ln 2}{2}\right) - F_2(0) &= F_2(u) \\ 2 \cdot \ln\left(2 + e^{2 \cdot \frac{\ln 2}{2}}\right) - \ln(2 + e^0) &= \ln(2 + e^{2u}) \\ \ln 16 - \ln 3 &= \ln(2 + e^{2u}) \\ \ln\left(\frac{16}{3}\right) &= \ln(2 + e^{2u})\end{aligned}$$

$$\frac{16}{3} = 2 + e^{2u}$$

$$\frac{10}{3} = e^{2u}$$

$$2u = \ln\left(\frac{10}{3}\right)$$

$$u = \frac{\ln\left(\frac{10}{3}\right)}{2}$$

Für  $u = \frac{\ln\left(\frac{10}{3}\right)}{2}$  gilt  $A_1 = A_2$ .