

Analysis 9

www.schulmathe.npage.de

Aufgaben

Gegeben sind die Funktionen f_a durch

$$f_a(x) = \frac{1}{a} \cdot (x - a) \cdot \sqrt{x} \quad (x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0; a \in \mathbb{R} \wedge a > 0)$$

- a) Geben Sie die Nullstellen der Funktionen f_a an.
Zeigen Sie, dass der Graph jeder Funktion f_a genau einen Minimumpunkt besitzt.
Berechnen Sie die Koordinaten der Minimumpunkte der Graphen der Funktionen f_a .
Geben Sie eine Gleichung für die Ortskurve o der Minimumpunkte der Graphen der Funktionen f_a an.
Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f_4 im Intervall $0 \leq x \leq 6$. Zeichnen Sie die Ortskurve in dasselbe Koordinatensystem.
- b) Der Graph der Funktion f_4 und die x -Achse begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.
Der Graph jeder Funktion f_a schließt mit der x -Achse jeweils eine Fläche vollständig ein.
Bei der Rotation dieser Flächen um die x -Achse entstehen Stromlinienkörper.
Ermitteln Sie den Wert a für den Fall, dass das Volumen des Körpers 3π beträgt.
- c) Die Tangenten an den Graphen jeder Funktion f_a in dem Minimumpunkt und in dem Schnittpunkt mit der x -Achse begrenzen zusammen mit den Koordinatenachsen ein Trapez.
Berechnen Sie den Inhalt der Trapezfläche in Abhängigkeit von a .

Lösungen

a) An den Nullstellen ist der Funktionswert $f_a(x) = 0$:

$$0 = \frac{1}{a} \cdot (x - a) \cdot \sqrt{x}$$

$$0 = x - a$$

$$x_1 = a$$

$$0 = \sqrt{x}$$

$$x_2 = 0$$

Zur Bestimmung der Extrema wird die erste Ableitung f'_a auf Nullstellen untersucht:

$$f_a(x) = \frac{1}{a} \cdot (x - a) \cdot \sqrt{x}$$

$$\begin{aligned} f'_a(x) &= \frac{1}{a} \cdot \left[\sqrt{x} + (x - a) \cdot \frac{1}{2} \cdot (x)^{-\frac{1}{2}} \right] \\ &= \frac{1}{a} \cdot \frac{3x - a}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$0 = 3x - a$$

$$x = \frac{1}{3}a$$

Zur Prüfung der tatsächlichen Existenz des Extremums wird die zweite Ableitung f''_a an dieser Stelle untersucht:

$$f'_a(x) = \frac{1}{a} \cdot \frac{3x - a}{2\sqrt{x}}$$

$$f''_a(x) = \frac{1}{a} \cdot \frac{3 \cdot (2\sqrt{x}) - (3x - a) \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}}{(2\sqrt{x})^2}$$

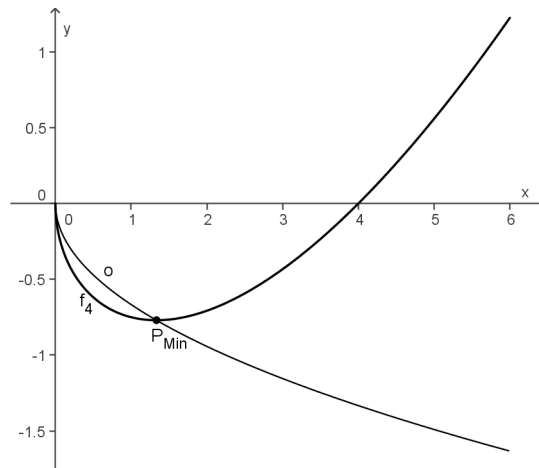
$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{6\sqrt{x} - (3x - a) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}}{4x}$$

$$f''_a\left(\frac{1}{3}a\right) = \frac{1}{a} \cdot \frac{6\sqrt{\frac{a}{3}} - (a - a) \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{3}}}}{4 \cdot \frac{a}{3}} = \frac{6\sqrt{\frac{a}{3}}}{\frac{4}{3}a^2} > 0$$

Der Punkt $P_{Min} \left(\frac{a}{3} \mid -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} \right)$ ist jeweils ein Minimumpunkt der Funktionen f_a .

Die Ortskurve o der Minimumpunkte ergibt sich durch Umstellen der Abszisse nach a und Einsetzen in die Ordinate:

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{3} \\ a &= 3x \\ y = o(x) &= -\frac{2}{3}\sqrt{x} \end{aligned}$$



- b) Zur Bestimmung des Flächeninhalts A wird die Funktion f_4 in den Grenzen $x_1 = 4$ und $x_2 = 0$ (Nullstellen) integriert:

$$\begin{aligned} A &= \int_4^0 \frac{1}{4} \cdot (x - 4) \cdot \sqrt{x} \, dx \\ &= \frac{1}{4} \cdot \int_4^0 (x - 4) \cdot \sqrt{x} \, dx \end{aligned}$$

Durch partielle Integration ergibt sich:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{4} \cdot \left[(x - 4) \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \int_4^0 \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \, dx \right] \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left[(x - 4) \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}x^{\frac{5}{2}} \right]_4^0 \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left[0 - \left(0 - \frac{4}{15} \cdot 4^{\frac{5}{2}} \right) \right] = \frac{2^5}{15} \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt beträgt $A \approx 2,13$.

Für das Volumen V eines solchen Rotationskörpers gilt:

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \int_0^a [f_a(x)]^2 dx \\ &= \pi \cdot \int_0^a \left(\frac{1}{a} \cdot (x-a) \cdot \sqrt{x} \right)^2 dx \\ &= \pi \cdot \frac{1}{a^2} \cdot \int_0^a (x-a)^2 \cdot x dx \\ &= \frac{\pi}{a^2} \cdot \int_0^a x^3 - 2ax^2 + a^2x dx \\ &= \frac{\pi}{a^2} \cdot \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}ax^3 + \frac{1}{2}a^2x^2 \right]_0^a \\ &= \frac{\pi}{a^2} \cdot \left(\frac{1}{4}a^4 - \frac{2}{3}a^4 + \frac{1}{2}a^4 \right) \\ &= \frac{1}{12}\pi a^2 \end{aligned}$$

Durch Einsetzen von $V = 3\pi$ ergibt sich der gesuchte Wert von a :

$$\begin{aligned} 3\pi &= \frac{1}{2}\pi a^2 \\ a^2 &= 36 \\ a_1 &= 6 \\ a_2 &= -6 \end{aligned}$$

a_2 entfällt, da $a > 0$ (siehe Definitionsbereich). Für $a = 6$ beträgt das Volumen des Stromlinienkörpers $V = 3\pi$.

- c) Die Tangente an den Minimumpunkt hat den Anstieg $m_1 = 0$, somit ergibt sich ihre Geradengleichung:

$$t_1 : y = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$$

Der Anstieg m_2 der Tangente an der Nullstelle entspricht dem Wert der ersten Ableitung an dieser Stelle $f'_a(a)$:

$$m_2 = f'_a(a) = \frac{1}{a} \cdot \frac{2a}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

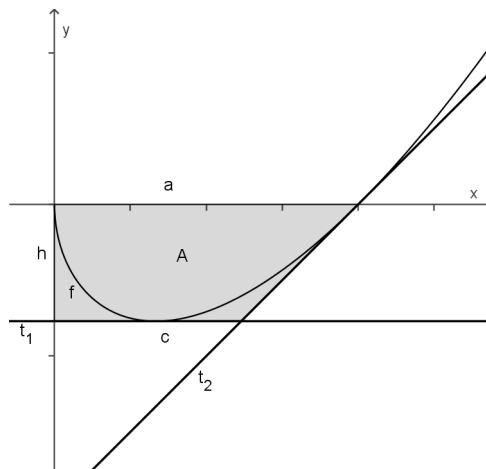
Setzt man nun den Punkt $P(a|0)$ und den Anstieg m_2 in die allgemeine Geradengleichung ein, ergibt sich die Tangentengleichung:

$$0 = \frac{a}{\sqrt{a}} + n$$

$$n = -\frac{a}{\sqrt{a}} = -\sqrt{a}$$

$$t_2: y = \frac{x}{\sqrt{a}} - \sqrt{a}$$

Skizze:



Für den Flächeninhalt A eines Trapezes gilt allgemein:

$$A = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$$

Zur Bestimmung der Seite c wird die Schnittstelle der Tangente t_1 und t_2 ermittelt:

$$-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} = \frac{x}{\sqrt{a}} - \sqrt{a}$$

$$x = \sqrt{a} \cdot \left(\sqrt{a} - \frac{2\sqrt{a}}{3\sqrt{3}} \right)$$

$$x = a - \frac{2a}{3\sqrt{3}}$$

$$x = a \cdot \left(1 - \frac{2}{9}\sqrt{3} \right) = c$$

Durch Einsetzen ergibt sich der Flächeninhalt $A(a)$ des Trapezes:

$$\begin{aligned} A(a) &= \frac{1}{2} \cdot \left| a + a \cdot \left(1 - \frac{2}{9}\sqrt{3} \right) \right| \cdot \left| -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} \right| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left| 2a - a \cdot \frac{2}{9}\sqrt{3} \right| \cdot \frac{2}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} \\ &= \frac{2a\sqrt{a}}{3\sqrt{3}} - \frac{2a\sqrt{3}\sqrt{a}}{27\sqrt{3}} \\ &= \frac{18 - 2\sqrt{3}}{27\sqrt{3}} \cdot a \cdot \sqrt{a} \\ &= \frac{6\sqrt{3} - 2}{27} \cdot a \cdot \sqrt{a} \end{aligned}$$