

Analysis 18

www.schulmathe.npage.de

Aufgaben

Für jedes $t (t \in \mathbb{R} \wedge t > 0)$ ist eine Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x) = \frac{1}{t} \cdot \ln \left(\frac{1}{t^3} - x^2 \right) \quad (x \in D_f)$$

- Ermitteln Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f_t .
Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f_t auf Symmetrie.
Ermitteln Sie die Anzahl der Nullstellen der Funktion f_t in Abhängigkeit von t .
- Ermitteln Sie die Koordinaten und die Art der lokalen Extrempunkte des Graphen der Funktion f_t .
Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f_t keine Wendepunkte besitzt.
- Der Graph einer quadratischen Funktion p hat mit dem Graphen der Funktion $f_{\frac{1}{e}}$ den Extrempunkt und die Schnittpunkte mit der Abszissenachse gemeinsam.
Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion p mit der Gleichung

$$p(x) = -\frac{3e}{e^3 - 1} \cdot x^2 + 3e$$

die beschriebenen Bedingungen erfüllt.

Berechnen Sie den Inhalt der vom Graphen der Funktion p und der Abszissenachse vollständig eingeschlossenen Fläche.

- Auf dem Graph der Funktion $f_{\frac{1}{e}}$ existiert genau ein Punkt A , für den der Anstieg der Senkrechten zur Tangente an den Graphen der Funktion $f_{\frac{1}{e}}$ im Punkt A den Wert -1 hat.
Ermitteln Sie die Abszisse des Punktes A .

Lösungen

a) Der natürliche Logarithmus ist nur für positive Logarithmanden definiert:

$$\begin{aligned}0 &< \frac{1}{t^3} - x^2 \\x^2 &< \frac{1}{t^3} \\x &< \sqrt{\frac{1}{t^3}} \\x &> -\sqrt{\frac{1}{t^3}}\end{aligned}$$

Es ergibt sich für den Definitionsbereich:

$$D_f \left\{ x \in \mathbb{R} \wedge -\sqrt{\frac{1}{t^3}} < x < \sqrt{\frac{1}{t^3}} \right\}$$

Zur Bestimmung der Symmetrie wird der Funktionswert $f_t(-x)$ untersucht:

$$f_t(-x) = \frac{1}{t} \cdot \ln \left[\frac{1}{t^3} - (-x)^2 \right] = \frac{1}{t} \cdot \ln \left(\frac{1}{t^3} - x^2 \right) = f_t(x)$$

Der Graph der Funktion f_t ist achsensymmetrisch zur y -Achse.

An den Nullstellen ist der Funktionswert $f_t(x) = 0$:

$$\begin{aligned}0 &= \frac{1}{t} \cdot \ln \left(\frac{1}{t^3} - x^2 \right) \\0 &= \ln \left(\frac{1}{t^3} - x^2 \right) \\1 &= \frac{1}{t^3} - x^2 \\x^2 &= \frac{1}{t^3} - 1 \\x &= \pm \sqrt{\frac{1}{t^3} - 1}\end{aligned}$$

Für $t = 1$ besitzt die Funktion f_t genau eine Nullstelle.

Für $t > 1$ besitzt die Funktion f_t genau zwei Nullstellen.

Für $t < 1$ besitzt die Funktion f_t keine Nullstellen.

- b) Zur Bestimmung der Extrema wird die erste Ableitung $f'_t(x)$ auf Nullstellen untersucht:

$$f_t(x) = \frac{1}{t} \cdot \ln\left(\frac{1}{t^3} - x^2\right)$$

$$\begin{aligned} f'_t(x) &= \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{\frac{1}{t^3} - x^2} \cdot (-2x) \\ &= \frac{-2x}{\frac{1 - t^3x^2}{t^2}} \\ &= \frac{2t^2x}{t^3x^2 - 1} \\ 0 &= 2t^2x \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Art des Extrema wird die zweite Ableitung an dieser Stelle $f''_t(0)$ untersucht:

$$\begin{aligned} f'_t(x) &= \frac{2t^2x}{t^3x^2 - 1} \\ f''_t(x) &= \frac{2t^2 \cdot (t^3x^2 - 1) - 2t^2x \cdot 2t^3x}{(t^3x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{2t^5x^2 - 2t^2 - 4t^5x^2}{(t^3x^2 - 1)^2} \\ &= -\frac{2t^5x^2 + 2t^2}{(t^3x^2 - 1)^2} \\ f''_t(0) &= -\frac{2t^5 \cdot 0 + 2t^2}{(t^3 \cdot 0 - 1)^2} = -2t^2 < 0 \end{aligned}$$

Der Punkt $P_{Max}\left(0 \mid -\frac{3}{t} \cdot \ln t\right)$ ist ein Maximum des Graphen der Funktion f_t .

Zur Bestimmung der Wendestellen wird die zweite Ableitung f_t'' auf Nullstellen untersucht:

$$\begin{aligned}0 &= -\frac{2t^5x^2 + 2t^2}{(t^3x^2 - 1)^2} \\0 &= 2t^5x^2 + 2t^2 \\x^2 &= -t^{-3}\end{aligned}$$

Es existieren keine Wendepunkte, da $t > 0$ (siehe Definition).

c) Zur Bestimmung der Extrema wird die erste Ableitung p' auf Nullstellen untersucht:

$$\begin{aligned}p(x) &= -\frac{3e}{e^3 - 1} \cdot x^2 + 3e \\p'(x) &= -\frac{6e}{e^3 - 1} \cdot x \\0 &= -\frac{6e}{e^3 - 1} \cdot x \\x &= 0\end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Art des Extremums wird die zweite Ableitung p'' untersucht:

$$\begin{aligned}p'(x) &= -\frac{6e}{e^3 - 1} \cdot x \\p''(x) &= -\frac{6e}{e^3 - 1} < 0\end{aligned}$$

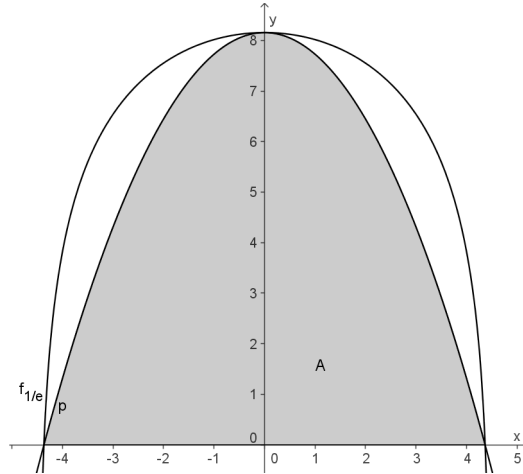
Der Punkt $P_{Max}(0|3e)$ ist ein Maximum des Graphen der Funktion p .

An den Nullstellen ist der Funktionswert $p(x) = 0$:

$$\begin{aligned}0 &= -\frac{3e}{e^3 - 1} \cdot x^2 + 3e \\x^2 &= e^3 - 1 \\x_1 &= \sqrt{e^3 - 1} \\x_2 &= -\sqrt{e^3 - 1}\end{aligned}$$

Der Graph der Funktion p schneidet die Abszissenachse in den Punkten $P_1(0|\sqrt{e^3-1})$ und $P_2(0|-\sqrt{e^3-1})$.

Alle Eigenschaften sind erfüllt:



Zur Bestimmung des Flächeninhalts A wird die Funktion p in den Grenzen $x_1 = -\sqrt{e^3-1}$ und $x_2 = \sqrt{e^3-1}$ (Nullstellen) integriert:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-\sqrt{e^3-1}}^{\sqrt{e^3-1}} \left(-\frac{3e}{e^3-1} \cdot x^2 + 3e \right) dx \\
 &= \left[-\frac{e}{e^3-1} \cdot x^3 + 3ex \right]_{-\sqrt{e^3-1}}^{\sqrt{e^3-1}} \\
 &= -\frac{e}{e^3-1} \cdot \sqrt{e^3-1}^3 + 3e \cdot \sqrt{e^3-1} + \frac{e}{e^3-1} \cdot \left(-\sqrt{e^3-1} \right)^3 - 3e \cdot \left(-\sqrt{e^3-1} \right) \\
 &= -\frac{2e}{e^3-1} \cdot \sqrt{e^3-1}^3 + 6e \cdot \sqrt{e^3-1} \\
 &= -2e \cdot \sqrt{e^3-1} + 6e \cdot \sqrt{e^3-1} \\
 &= 4e \cdot \sqrt{e^3-1}
 \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt beträgt $A \approx 47,5$.

d) Für die Anstiege orthogonaler Geraden gilt:

$$m_t = -\frac{1}{m_n}$$

Der Anstieg der Tangente beträgt somit $m_t = 1$ und entspricht dem Wert der ersten Ableitung $f'_{\frac{1}{e}}$ an der gesuchten Stelle:

$$\begin{aligned}f'_{\frac{1}{e}}(x) = 1 &= \frac{2ex}{x^2 - e^3} \\x^2 - e^3 &= 2ex \\0 &= x^2 - 2ex - e^3 \\x_{1,2} &= e \pm \sqrt{e^2 + e^3} \\x_1 &= e + \sqrt{e^2 + e^3} \\x_2 &= e - \sqrt{e^2 + e^3}\end{aligned}$$

x_1 entfällt, da $e + \sqrt{e^2 + e^3} > \sqrt{e^3}$ (siehe Definitionsbereich). Der Graph der Funktion $f_{\frac{1}{e}}$ hat an der Stelle $x = e - \sqrt{e^2 + e^3}$ den Anstieg 1.