

Analysis 6

www.schulmathe.npage.de

Aufgaben

Gegeben sind die Funktionen f_a durch

$$f_a(x) = \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) \quad (a \in \mathbb{R}, a > 0; x \in D_f)$$

- Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f_a in Abhängigkeit von a an und führen Sie für die Funktionen f_a eine Kurvendiskussion durch (Nullstellen, Symmetrie, Monotonie, Koordinaten und Art der lokalen Extrem- und Wendepunkte).
Zeichnen Sie den Graphen der Funktionen f_1 und f_4 im größtmöglichen Definitionsbereich.
- Ermitteln Sie eine Gleichung für die Wendetangenten an die Graphen der Funktionen f_a in Abhängigkeit von a .
- Gegeben sind die Funktionen F_a durch

$$F_a(x) = (a+x) \cdot \ln(a+x) + (a-x) \cdot \ln(a-x) \quad (a \in \mathbb{R}, a > 0; x \in D_F)$$

- Weisen Sie nach, dass für jedes a die Funktion F_a Stammfunktion der Funktion f_a ist.
- Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktion f_1 und f_4 , sowie der Geraden mit der Gleichung $x = 0,5$ vollständig begrenzt wird.
- Gegeben ist die Funktion h durch

$$h(x) = \frac{2}{1-x^2} \quad (x \in \mathbb{R}, -1 < x < 1)$$

Zeichnen Sie den Graph der Funktion h im Intervall $-1 < x < 1$.
Jede der Geraden mit der Gleichung $x = u$ ($u \in \mathbb{R}, 0 < u < 1$) schneidet den

Graph der Funktion h im Punkt P_u und den Graph der Funktion f_1 im Punkt Q_u .
Für welchen Wert u ist der Abstand $\overline{P_u Q_u}$ minimal?
Berechnen Sie diesen Abstand.

Lösungen

- a) Der natürliche Logarithmus ist nur für positive Logarithmanden definiert. Es folgt für den Definitionsbereich:

$$D_f \{x \in \mathbb{R} \wedge -a < x < a\}$$

An den Nullstellen ist der Funktionswert $f_a(x) = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) \\ e^0 &= \frac{a+x}{a-x} \\ a-x &= a+x \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Die Funktionen f_a besitzen an der Stelle $x = 0$ eine Nullstelle.

Zur Bestimmung der Symmetrie ermittelt man $f_a(-x)$:

$$\begin{aligned} f_a(-x) &= \ln\left(\frac{a+(-x)}{a-(-x)}\right) \\ &= \ln(a-x) - \ln(a+x) \\ &= -(\ln(a+x) - \ln(a-x)) \\ &= -\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) \\ &= -f_a(x) \end{aligned}$$

Die Funktionen f_a sind punktsymmetrisch zum Ursprung.

Zur Bestimmung der Monotonie untersucht man die erste Ableitung f'_a :

$$\begin{aligned} f_a(x) &= \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) \\ f'_a(x) &= \frac{a-x}{a+x} \cdot \frac{(a-x) - (a+x)(-1)}{(a-x)^2} \\ &= \frac{2a}{a^2 - x^2} \end{aligned}$$

Da $2a > 0$ und $a^2 - x^2 > 0$ ist $f'_a > 0$ im gesamten Definitionsbereich. Die Funktion f_a ist im gesamten Definitionsbereich monoton steigend.

Um die Extrema zu ermitteln, untersucht man die erste Ableitung f'_a auf Nullstellen:

$$0 = \frac{2a}{a^2 - x^2}$$
$$0 = 2a$$

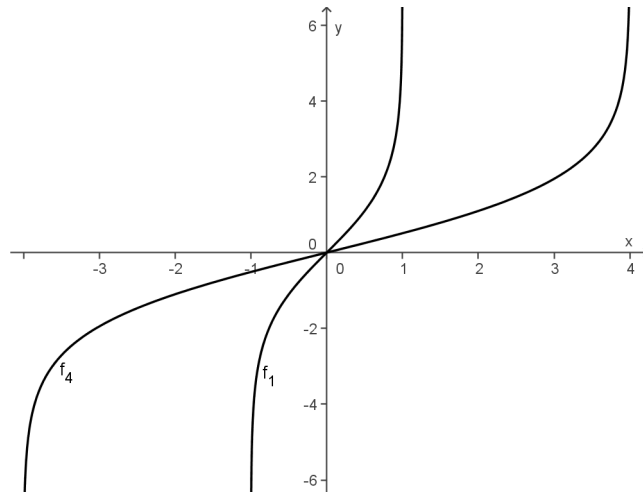
Nach Definition ist $a > 0$. Somit ist $2a \neq 0$. Es existieren keine lokalen Extrema. Zur Bestimmung von Wendepunkten untersucht man die zweite Ableitung f''_a :

$$f'_a(x) = \frac{2a}{a^2 - x^2}$$
$$f''_a(x) = \frac{-2a \cdot (-2x)}{(a^2 - x^2)^2}$$
$$0 = \frac{4ax}{(a^2 - x^2)^2}$$
$$0 = 4ax$$
$$x = 0$$

Zur Überprüfung der tatsächlichen Existenz untersucht man die dritte Ableitung an dieser Stelle $f'''_a(0)$:

$$f''_a(x) = \frac{4ax}{(a^2 - x^2)^2}$$
$$f'''_a(x) = \frac{4a \cdot (a^2 - x^2)^2 - 4ax \cdot 2 \cdot (a^2 - x^2) \cdot (-2x)}{(a^2 - x^2)^4}$$
$$= \frac{4a^3 - 4ax^2 + 16ax^2}{(a^2 - x^2)^3}$$
$$= \frac{4a^3 + 12ax^2}{(a^2 - x^2)^3}$$
$$f'''_a(0) = \frac{4a^3}{(a^2)^3} \neq 0$$

Der Punkt $W(0|0)$ ist ein Wendepunkt der Funktionen f_a .



- b) Um den Anstieg m_a der Wendetangente t_W zu ermitteln bestimmt man den Wert der ersten Ableitung an der Wendestelle $f'_a(0)$:

$$m_a = f'_a(0) = \frac{2a}{a^2} = \frac{2}{a}$$

Nun setzt man den Anstieg $m_a = \frac{2}{a}$ und den Wendepunkt $W(0|0)$ in die allgemeine Geradengleichung $y = mx + n$ ein:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{2}{a} \cdot 0 + n \\ n &= 0 \\ t_W : y &= \frac{2}{a}x \end{aligned}$$

- c) Wenn F_a eine Stammfunktion von f_a ist, muss $F'_a = f_a$ sein:

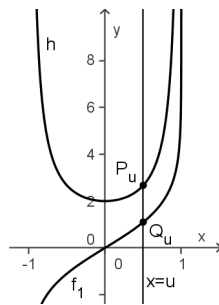
$$F_a(x) = (a+x) \cdot \ln(a+x) + (a-x) \cdot \ln(a-x)$$

$$\begin{aligned} F'_a(x) &= \ln(a+x) + (a+x) \cdot (a+x)^{-1} - \ln(a-x) + (a-x) \cdot (a-x)^{-1} \cdot (-1) \\ &= \ln(a+x) - \ln(a-x) \\ &= \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) \\ &= f_a \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt A_a ergibt sich durch Integrierung der Funktionsdifferenz $f_1 - f_4$ in den Grenzen $x_1 = 0$ (Schnittstelle der Funktionsgraphen) und $x_2 = 0,5$:

$$\begin{aligned}
 A_a &= \int_0^{0,5} \left[\ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) - \ln \left(\frac{4+x}{4-x} \right) \right] dx \\
 &= \left[(1+x) \cdot \ln(1+x) - \cancel{(1+x)} + (1-x) \cdot \ln(1-x) + \cancel{(1+x)} \right. \\
 &\quad \left. - (4+x) \cdot \ln(4+x) - \cancel{(4+x)} - (4-x) \cdot \ln(4-x) + \cancel{(4+x)} \right]_0^{0,5} \\
 &= 1,5 \cdot \ln(1,5) + 0,5 \cdot \ln(0,5) - 4,5 \cdot \ln(4,5) - 3,5 \cdot \ln(3,5) \\
 &\quad - (\ln 1 + \ln 1 - 4 \cdot \ln 4 - 4 \cdot \ln 4) \\
 &= 22 \cdot \ln 2 - \frac{15}{2} \cdot \ln 3 - \frac{7}{2} \cdot \ln 7 \\
 &\approx 0,20
 \end{aligned}$$

d) Skizze:



Der Abstand d ergibt sich aus der Differenz der Funktionswerte der Funktionen f_1 und h an der Stelle u :

$$d(u) = h(u) - f_1(u) = \frac{2}{1-u^2} - \ln \left(\frac{1+u}{1-u} \right) \quad (0 < u < 1)$$

Durch Differentiation der Zielfunktion findet man den minimalen Abstand:

$$\begin{aligned}
 d(u) &= \frac{2}{1-u^2} - \ln \left(\frac{1+u}{1-u} \right) \\
 d'(u) &= \frac{4u}{(1-u^2)^2} - \frac{\cancel{1-u}}{1+u} \cdot \frac{1-u+1+u}{(1-u)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4u}{(1-u^2)^2} - \frac{2}{1-u^2} \\
&= \frac{2u^2 + 4u - 2}{(1-u^2)^2} \\
0 &= u^2 + 2u - 1 \\
u_{1,2} &= -1 \pm \sqrt{1^2 + 1} \\
u_1 &= -1 - \sqrt{2} \\
u_2 &= -1 + \sqrt{2}
\end{aligned}$$

u_1 entfällt (siehe Definitionsbereich). Mit der zweiten Ableitung d'' wird geprüft, ob es sich tatsächlich um ein Minimum handelt:

$$\begin{aligned}
d'(x) &= \frac{2u^2 + 4u - 2}{(1-u^2)^2} \\
d''(x) &= \frac{(4u+4) \cdot (1-u^2)^2 - (2u^2+4u-2) \cdot 2 \cdot (1-u^2) \cdot (-2u)}{(1-u^2)^4} \\
&= \frac{4u - 4u^3 + 4 - 4u^2 + 8u^3 + 16u^2 - 8u}{(1-u^2)^3} \\
&= \frac{4u^3 + 12u^2 - 4u + 4}{(1-u^2)^3} \\
d''(-1 + \sqrt{2}) &= 3 \cdot \sqrt{2} + 4 > 0
\end{aligned}$$

Für $u = -1 + \sqrt{2}$ ist der Abstand d minimal. Für diesen minimalen Abstand gilt:

$$d(-1 + \sqrt{2}) = \frac{2}{1 - (-1 + \sqrt{2})^2} - \ln \left(\frac{1 + (-1 + \sqrt{2})}{1 - (-1 + \sqrt{2})} \right) \approx 1,53$$

Der minimale Abstand beträgt $d \approx 1,53$.