

# Analysis 1

www.schulmathe.npage.de

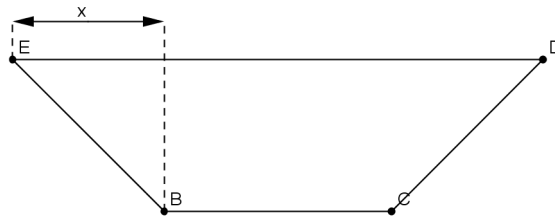
## Aufgaben

1. Ein Gleisplan einer ebenen Modellbahnanlage wird auf der Grundlage eines Koordinatensystems erstellt. Eine Längeneinheit entspricht einem Dezimeter. Die beiden geradlinig verlaufenden Gleisabschnitte zwischen den Punkten  $A(-10|0)$  und  $B(0|0)$  sowie zwischen den Punkten  $C(7|7)$  und  $D(14|11)$  sind bereits festgelegt. Zwischen den Punkten  $B$  und  $C$  soll ein Übergangsbogen so eingepasst werden, dass jeder Übergang zwischen den Schienenstücken ohne Knick erfolgt. Die Lage der Schienen wird vereinfacht durch ihre Mittellinie bestimmt. Tim schlägt vor, die Lage dieses Übergangsbogens durch den Graph einer ganzrationalen Funktion zu ermitteln. Begründen Sie, dass eine ganzrationale Funktion dritten Grades dazu geeignet ist. Bestimmen Sie eine Gleichung einer solchen Funktion.
2. Gegeben ist die Funktion  $f$  mit

$$f(x) = \frac{x^2}{9} + \frac{9}{x^2}$$

- a) Geben Sie den Definitionsbereich der Funktion  $f$  an. Untersuchen Sie die Funktion  $f$  auf Symmetrie sowie auf achsenparallele Asymptoten. Geben Sie die Koordinaten des Extrempunktes und die Art der Extrema sowie den Wertebereich der Funktion an. Zeigen Sie, dass die Funktion  $f$  keine Wendepunkte besitzt.
- b) Für jedes  $u (u \in \mathbb{R} \wedge u > 0)$  sind die Punkte  $A_u(u|f(u))$ ,  $B_u(-u|f(-u))$  und der Koordinatenursprung  $O$  Eckpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks. Es gibt einen Wert  $u$ , für den der Flächeninhalt dieses Dreiecks minimal wird. Ermitteln Sie diesen Wert  $u$  sowie den Flächeninhalt des zugehörigen Dreiecks. Geben Sie die Koordinaten der entsprechenden Punkte  $A_u$  und  $B_u$  an.

3. Der Querschnitt einer oben offenen Rinne ist ein gleichschenkliges Trapez (siehe Skizze) mit  $\overline{BC} = 6,8 \text{ dm}$  und  $\overline{CD} = \overline{BE} = 4,0 \text{ dm}$ . Berechnen Sie  $x$  für den Fall, dass der Flächeninhalt der Querschnitts maximal wird. Geben Sie diesen maximalen Flächeninhalt an.



## Lösungen

1. Eine ganzrationale Funktion dritten Grades ist geeignet, da sie einen Wendepunkt besitzt. Man kann die beiden Gleisabschnitte „knickfrei“ miteinander verbinden.

Die allgemeine Gleichung einer solchen Funktion lautet

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

In den Anbindungspunkten  $B$  und  $C$  muss die Funktion  $f$  den gleichen Anstieg besitzen wie die geradlinigen Gleisstücke. Also benötigt man die erste Ableitung  $f'$ :

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Den Anstieg einer Geraden ermittelt man mit der Gleichung:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$m_{\overline{AB}} = \frac{0}{10} = 0 \qquad m_{\overline{CD}} = \frac{11 - 7}{14 - 7} = \frac{4}{7}$$

Setzt man nun die Anstiege in die Ableitungsfunktion  $f'$  und die Anbindungspunkte in die Funktion  $f$  ein, ergibt sich ein Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcll} f(0) & = & 0 & = & 0a + 0b + 0c + d \\ f(7) & = & 7 & = & 343a + 49b + 7c + d \\ f'(0) & = & 0 & = & 0a + 0b + c \\ f'(7) & = & \frac{4}{7} & = & 147a + 14b + c \end{array}$$

---

$$\begin{array}{rcl} 7 & = & 343a + 49b \\ \frac{4}{7} & = & 147a + 14b \end{array}$$

---

$$a = -\frac{10}{343} \qquad b = \frac{17}{49}$$

Es ergibt sich die Funktion:

$$f(x) = -\frac{10}{343}x^3 + \frac{17}{49}x^2$$

2. a) Die Funktion ist nicht definiert, wenn der Nenner  $x^2 = 0$  wird. Für den Definitionsbereich ergibt sich:

$$D_f \{x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 0\}$$

Untersuchung der Funktion  $f$  auf Symmetrie:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{9} + \frac{9}{(-x)^2} = \frac{x^2}{9} + \frac{9}{x^2} = f(x)$$

Die Funktion  $f$  ist Achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse.

Die Funktion  $f$  hat an ihrer Polstelle  $x = 0$  eine senkrechte Asymptote. Zur Ermittlung einer waagerechten Asymptote bestimmt man die Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{9} + \frac{9}{x^2} = \infty + 0 = \infty$$

Die Funktion  $f$  besitzt keine waagerechte Asymptote.

Zur Bestimmung der Extrema untersucht man die erste Ableitung  $f'$  auf Nullstellen:

$$f(x) = \frac{x^2}{9} + \frac{9}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2}{9}x - \frac{18}{x^3}$$

$$0 = \frac{2}{9}x - \frac{18}{x^3}$$

$$\frac{18}{x^3} = \frac{2}{9}x$$

$$x^4 = 81$$

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = 3$$

Zur Bestimmung der Art der Extrema untersucht man die zweite Ableitung  $f''$  an diesen Stellen:

$$f'(x) = \frac{2}{9}x - \frac{18}{x^3}$$

$$f''(x) = \frac{2}{9} + \frac{54}{x^4}$$

$$f''(-3) = \frac{2}{9} + \frac{54}{(-3)^4} > 0$$

$$f''(3) = \frac{2}{9} + \frac{54}{(3)^4} > 0$$

Die Punkte  $P_{Min_1}(-3|2)$  und  $P_{Min_2}(3|2)$  sind Minimumpunkte von  $f$ .

Daraus ergibt sich der Wertebereich:

$$W_f\{y \in \mathbb{R} \wedge y \geq 2\}$$

Wendepunkte bestimmt man über die Nullstellen der zweiten Ableitung  $f''$ :

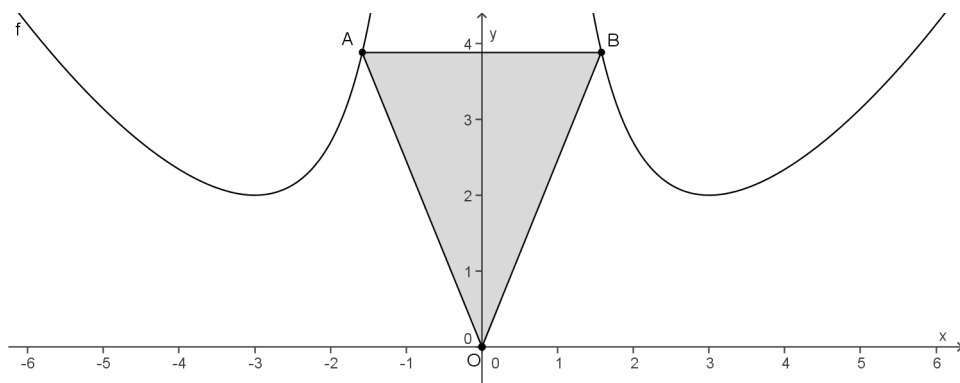
$$0 = \frac{2}{9} + \frac{54}{x^4}$$

$$-\frac{2}{9}x^4 = 54$$

$$x^4 = -9 \cdot 27$$

Es gibt kein reelles  $x$ , das die Ungleichung  $x^4 < 0$  erfüllt. Die Funktion  $f$  besitzt keinen Wendepunkt.

b) Skizze:



Für den Flächeninhalt eines gleichschenkligen Dreiecks gilt:

$$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$

Hier gilt weiter:

$$\frac{1}{2} \cdot g = u$$

$$h = f(u)$$

$$A = u \cdot f(u)$$

$$A(u) = u \cdot \left( \frac{u^2}{9} + \frac{9}{u^2} \right)$$

Zur Untersuchung auf Extrema leitet man die Zielfunktion ab:

$$A'(u) = \frac{u^2}{3} - \frac{9}{u^2}$$

$$0 = \frac{u^2}{3} - \frac{9}{u^2}$$

$$\frac{9}{u^2} = \frac{u^2}{3}$$

$$u^4 = 27$$

$$u = \pm \sqrt[4]{27}$$

Nun gilt es die Art der Extrema zu bestimmen:

$$A'(u) = \frac{u^2}{3} - \frac{9}{u^2}$$

$$A''(u) = \frac{2}{3}x + \frac{18}{u^3}$$

$$A''(\sqrt[4]{27}) = \frac{2}{3} \cdot (\sqrt[4]{27}) + \frac{18}{(\sqrt[4]{27})^3} > 0$$

$$A''(-\sqrt[4]{27}) = \frac{2}{3} \cdot (-\sqrt[4]{27}) + \frac{18}{(-\sqrt[4]{27})^3} < 0$$

Für  $u \approx 2,28$  wird der Flächeninhalt  $A$  des Dreiecks minimal.  $A_{Min}$  beträgt circa 5,26. Die entsprechenden Punkte sind  $A(2,28|2,3)$  und  $B(-2,28|2,3)$ .

3. Für den Flächeninhalt  $A$  eines Trapezes gilt:

$$A = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$$

Hier gilt weiter:

$$a = \overline{BC}$$

$$c = \overline{BC} + 2x$$

$$h = \sqrt{\overline{BE}^2 - x^2}$$

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{2}(2 \cdot \overline{BC} + 2x) \cdot \sqrt{\overline{BE}^2 - x^2} \\ &= (6,8 + x) \cdot \sqrt{16 - x^2} \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Extrema untersucht man die erste Ableitung  $A'$  auf Nullstellen:

$$A(x) = (6,8 + x) \cdot \sqrt{16 - x^2}$$

$$A'(x) = \sqrt{16 - x^2} + (6,8 + x) \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{16 - x^2}} \cdot (-2x)$$

$$0 = \frac{16 - 6,8x - 2x^2}{\sqrt{16 - x^2}}$$

$$0 = -8 + 3,4x + x^2$$

$$x_{1,2} = -1,7 \pm \sqrt{(1,7)^2 + 8}$$

$$x_1 = -5$$

$$x_2 = 1,6$$

$x_1$  entfällt, da  $6,8 + 2 \cdot (-5) < 0$ . Die Existenz der Extremstelle  $x_2$  ist aus der zweiten Ableitung  $A''$  zu ermitteln:

$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{16 - 6,8x - 2x^2}{\sqrt{16 - x^2}} \\ &= (16 - 6,8x - 2x^2) \cdot (16 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A''(x) &= (-6,8 - 4x) \cdot (16 - x^2)^{-\frac{1}{2}} + (16 - 6,8x - 2x^2) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (16 - x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2x) \\ &= \frac{-6,8 - 4x}{\sqrt{16 - x^2}} + \frac{16x - 6,8x^2 - 2x^3}{\left(\sqrt{16 - x^2}\right)^3} \end{aligned}$$

$$A''(1,6) = \frac{-6,8 - 4 \cdot 1,6}{\sqrt{16 - (1,6)^2}} + \frac{16 \cdot 1,6 - 6,8 \cdot (1,6)^2 - 2 \cdot (1,6)^3}{\left(\sqrt{16 - (1,6)^2}\right)^3} < 0$$

Für  $x = 1,6$  ist der Flächeninhalt des Querschnitts der Rinne maximal. Der maximale Flächeninhalt beträgt  $A_{Max} = 8,4 \cdot \sqrt{13,44} \approx 30,8$ .