Analysis 3

www.schulmathe.npage.de

Aufgaben

1. Ermitteln Sie die erste Ableitung. Vereinfachen Sie.

   a) $f(x) = e^x \cdot (2x - 3)$ b) $f(x) = \dfrac{\ln x}{2x + 4}$ c) $f(x) = x^2 \cdot \ln(tx - 5)$

2. Ermitteln Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

   a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x - 3}\, dx$ b) $\displaystyle\int \frac{5}{4x - 3}\, dx$ c) $\displaystyle\int \left(4x^2 \cdot \ln x\right)\, dx$

3. Gegeben ist die Funktion f durch

$$f(x) = x \cdot (2 - \ln x) \qquad (x \in D_f)$$

   a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f an. Untersuchen Sie die Funktion f rechnerisch auf Nullstellen und lokale Extrempunkte (einschließlich Art der Extrema). Geben Sie das Verhalten der Funktion im Unendlichen an.

   b) Gegeben sei weiter eine Funktion g durch

$$g(x) = 2x + 1$$

   Jede Gerade mit der Gleichung $x = u$ ($u \in R$, $u > 0$) schneidet den Graph der Funktion f im Punkt P_u und die Gerade g im Punkt Q_u. Ermitteln Sie den Wert für u, für den der Abstand der Punkte P_u und Q_u am kleinsten ist. Geben Sie diesen minimalen Abstand an.

   c) Der Graph der Funktion f, die Gerade $x = 1$ und die x-Achse begrenzen eine Fläche vollständig. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

4. Gegeben ist eine Funktionenschar f_t mit

$$f_t(x) = \left(x + \frac{1}{t}\right) \cdot e^{-tx} \qquad (t \in R,\, t \neq 0;\, x \in R)$$

a) Geben Sie die Nullstelle der Funktion f_t an. Berechnen Sie die Koordinaten des Extrempunktes, die Art des Extremums sowie die Koordinaten des Wendepunktes der Funktion f_t.

b) Für jedes k ($k \in R$, $k > 0$) begrenzen die Gerade $x = k$, die Koordinatenachsen und der Graph der Funktion $f_{0,5}$ ein Fläche vollständig.Ermitteln Sie den Inhalt $A(k)$ dieser Fläche sowie $\lim\limits_{k \to \infty} A(k)$.

c) Der Graph einer quadratischen Funktion mit dem Scheitel im Koordinatenursprung schneidet den Graph der Funktion $f_{0,5}$ im Punkt $P(1|f_{0,5}(1))$. Ermitteln Sie die Gleichung dieser quadratischen Funktion.
Der Graph der quadratischen Funktion rotiert um die x-Achse. Ermitteln Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers über dem Intervall $\big[0;\, 1\big]$.

Lösungen

1. a) Mit der Produktregel ergibt sich:

$$f(x) = e^x \cdot (2x - 3)$$

$$f'(x) = e^x \cdot (2x - 3) + e^x \cdot 2$$
$$f'(x) = e^x \cdot (2x - 1)$$

   b) Durch Anwendung der Quotientenregel ergibt sich hier:

$$f(x) = \frac{\ln x}{2x + 4}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot (2x + 4) - 2 \cdot \ln x}{(2x + 4)^2}$$
$$f'(x) = \frac{2 + 4x^{-1} - 2 \cdot \ln x}{4x^2 + 16x + 16}$$
$$f'(x) = \frac{1 + 2x^{-1} - \ln x}{2x^2 + 8x + 8}$$

   c) Aus der Produktregel folgt:

$$f(x) = x^2 \cdot \ln(tx - 5)$$

$$f'(x) = 2x \cdot \ln(tx - 5) + x^2 \cdot \frac{1}{tx - 5} \cdot t$$
$$f'(x) = 2x \cdot \ln(tx - 5) + \frac{tx^2}{tx - 5}$$

2. siehe Aufgabenblatt „Unbestimmte Integrale“. Aufgaben 1 bis 3.

3. a) Der natürliche Logarithmus ist nur für positive Logarithmanden definiert. Also gilt für den Definitionsbereich:

$$D_f \{x \in R \wedge x > 0\}$$

An den Nullstellen ist der Funktionswert $f(x) = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= x \cdot (2 - \ln x) \\ x_1 &= 0 \\ 0 &= 2 - \ln x \\ 2 &= \ln x \\ x_2 &= e^2 \end{aligned}$$

x_1 entfällt (siehe D_f). f besitzt an der Stelle $x = e^2$ eine Nullstelle.

Zur Bestimmung der Extrema der Funktion f untersucht man die erste Ableitung f' auf Nullstellen:

$$f(x) = x \cdot (2 - \ln x)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 - \ln x + x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) \\ 0 &= 1 - \ln x \\ 1 &= \ln x \\ x &= e \end{aligned}$$

Die Art des Extremums ermittelt man mit der zweiten Ableitung f'':

$$f'(x) = 1 - \ln x$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{1}{x} \\ f''(e) &= -\frac{1}{e} < 0 \end{aligned}$$

Die Funktion f besitzt ein Maximum im Punkt $P_{Max}(e|e)$.

Für den Grenzwert $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ gilt:

$$\lim_{x \to \infty} x \cdot (2 - \ln x) = -\infty$$

b) Den Abstand d berechnet man mit der Gleichung:

$$
\begin{aligned}
d(x) &= g(x) - f(x) \\
&= 2x + 1 - x \cdot (2 - \ln x) \\
&= 1 + x \cdot \ln x
\end{aligned}
$$

Mit der ersten Ableitung d' ermittelt man das Extremum:

$$
d(x) = 1 + x \cdot \ln x
$$

$$
\begin{aligned}
d'(x) &= \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \\
0 &= \ln x + 1 \\
-1 &= \ln x \\
x &= e^{-1}
\end{aligned}
$$

Aus der zweiten Ableitung lässt sich ermitteln, ob es tatsächlich um ein Minimum handelt:

$$
d'(x) = \ln x + 1
$$

$$
\begin{aligned}
d''(x) &= \frac{1}{x} \\
d''(e^{-1}) &= e > 0
\end{aligned}
$$

Für $u = \dfrac{1}{e}$ ist der Abstand d der Punkte $P_{e^{-1}}$ und $Q_{e^{-1}}$ am kleinsten. Der minimale Abstand beträgt $d = 1 - e^{-1}$.

c) Zur Berechnung der Fläche muss man die Funktion f in den Grenzen $x_1 = 1$ und $x_2 = e^2$ (Nullstelle) integrieren:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_1^{e^2} x \cdot (2 - \ln x) \; dx \\
&= \int_1^{e^2} 2x - x \cdot \ln x \; dx \\
&= \left[x^2 - \frac{1}{2}x^2 \cdot \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) \right]_1^{e^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[x^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\ln x - \frac{1}{2}\right)\right)\right]_1^{e^2} \\
&= e^4 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\ln e^2 - \frac{1}{2}\right)\right) - \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\ln 1 - \frac{1}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{4}e^4 + \frac{5}{4}
\end{aligned}
$$

4. a) An der Nullstelle ist der Funktionswert $f(x) = 0$:

$$
\begin{aligned}
0 &= \left(x + \frac{1}{t}\right) \cdot e^{-tx} \\
0 &= x + \frac{1}{t} \\
x &= -\frac{1}{t}
\end{aligned}
$$

Über die Nullstellen der ersten Ableitung f_t' ermittelt man das Extremum:

$$
f_t(x) = \left(x + \frac{1}{t}\right) \cdot e^{-tx}
$$

$$
\begin{aligned}
f_t'(x) &= e^{-tx} + \left(x + \frac{1}{t}\right) \cdot e^{-tx} \cdot (-t) \\
0 &= -e^{-tx} \cdot tx \\
0 &= tx \\
x &= 0
\end{aligned}
$$

Mit der zweiten Ableitung f_t'' ermittelt man die Art des Extremum:

$$
f_t'(x) = -e^{-tx} \cdot tx
$$

$$
\begin{aligned}
f_t''(x) &= -e^{-tx} \cdot (-t) \cdot tx - e^{-tx} \cdot t \\
&= e^{-tx} \cdot \left(t^2 x - t\right) \\
f_t''(0) &= e^0 \cdot (0 - t) \\
&= -t
\end{aligned}
$$

Für $t < 0$ ist der Punkt $P_{Extrem}\left(0\middle|\frac{1}{t}\right)$ ein Minimum der Funktion f_t. Für $t > 0$ handelt es sich um ein Maximum.

Zur Bestimmung der Wendestelle ermittelt man die Nullstelle der zweiten Ableitung f_t'':

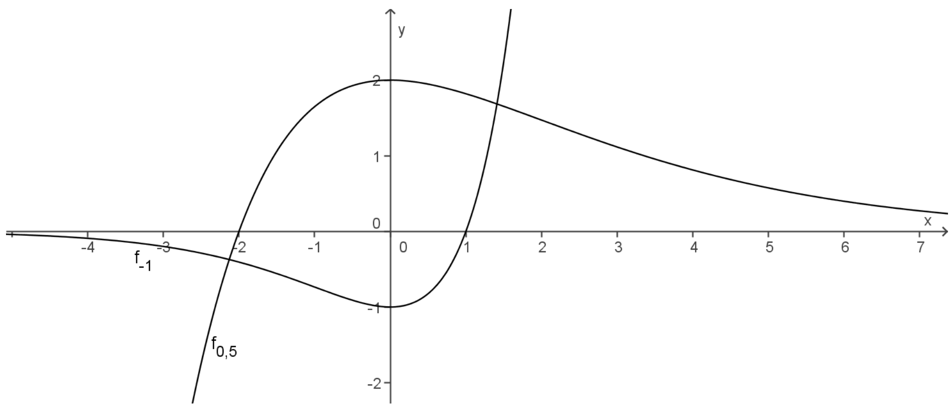
$$
\begin{aligned}
f_t''(x) &= e^{-tx} \cdot \left(t^2x - t\right) \\
0 &= e^{-tx} \cdot \left(t^2x - t\right) \\
0 &= t^2x - t \\
0 &= t(tx - 1) \\
0 &= tx - 1 \\
x &= \frac{1}{t}
\end{aligned}
$$

Um zu ermitteln, ob diese Wendestelle tatsächlich existiert, prüft man sie mit der dritten Ableitung f_t''':

$$
f''(x) = e^{-tx} \cdot \left(t^2x - t\right)
$$

$$
\begin{aligned}
f_t'''(x) &= -t \cdot e^{-tx} \cdot \left(t^2x - t\right) + e^{-tx} \cdot t^2 \\
&= e^{-tx} \cdot \left(-t^3x + 2t^2\right) \\
f_t'''\left(\frac{1}{t}\right) &= e^{-1} \cdot \left(-t^2 + 2t^2\right) \\
&= \frac{t^2}{e} \neq 0
\end{aligned}
$$

Der Punkt $W\left(\frac{1}{t}\middle|\frac{2}{et}\right)$ ist ein Wendepunkt der Funktion f_t.



b) Zur Ermittlung des Flächeninhalts A wird die Funktion $f_{0,5}$ in den Grenzen $x_1 = 0$ und $x = k$ integriert:

$$\begin{aligned}
A(k) &= \int_0^k (x+2) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}\ dx \\
&= -2e^{-\frac{1}{2}x} \cdot (x+2) - \int_0^k -2e^{-\frac{1}{2}x}\ dx \\
&= \Big[-2e^{-\frac{1}{2}x} \cdot (x+2) - 4e^{-\frac{1}{2}x} \Big]_0^k \\
&= \Big[-e^{-\frac{1}{2}x} \cdot (2x+8) \Big]_0^k \\
&= -e^{-\frac{1}{2}k} \cdot (2k+8) + e^0 \cdot (0+8) \\
&= -e^{-\frac{1}{2}k} \cdot (2k+8) + 8
\end{aligned}$$

Für den Grenzwert $\lim\limits_{k\to\infty} A(k)$ gilt:

$$\lim_{k\to\infty} -e^{-\frac{1}{2}k} \cdot (2k+8) + 8 = 0 + 8 = 8$$

c) Die allgemeine Gleichung einer quadratischen Funktion lautet:

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
f'(x) &= 2ax + b
\end{aligned}$$

Aus der Aufgabenstellung kann man direkt folgern, dass die Punkte $S(0|0)$ und $P\left(1|3e^{-\frac{1}{2}}\right)$ auf der Funktion liegen. Der Anstieg im Scheitelpunkt $f'(0) = 0$. Es ergibt sich das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
f(0) &=& 0 &=& 0\cdot a &+& 0\cdot b &+& c \\
f(1) &=& 3e^{-\frac{1}{2}} &=& 1\cdot a &+& 1\cdot b &+& c \\
f'(0) &=& 0 &=& 0\cdot a &+& b && \\
\hline
&& a &=& 3e^{-\frac{1}{2}} && b &=& 0 \\
&& && && c &=& 0
\end{array}$$

Es ergibt sich die Funktionsgleichung:

$$f(x) = 3e^{-\frac{1}{2}} \cdot x^2$$

Das Volumen eines solchen Rotationskörpers berechnet man mit der Gleichung:

$$V = \pi \cdot \int_a^b \Big[f(x)\Big]^2 \, dx$$

Eingesetzt ergibt sich:

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \int_0^1 \left(3e^{-\frac{1}{2}} \cdot x^2\right)^2 \, dx \\ &= \pi \cdot \int_0^1 \left(9e^{-1} \cdot x^4\right) \, dx \\ &= \pi \cdot \left[\frac{9}{5}e^{-1} \cdot x^5\right]_0^1 \\ &= \pi \cdot \left(\frac{9}{5}e^{-1} - 0\right) \\ &= \frac{9}{5e}\pi \end{aligned}$$

Das Volumen des entstehenden Rotationskörpers beträgt $\frac{9}{5e}\pi$.