Extremwertaufgaben

www.schulmathe.npage.de

Aufgaben

1. Von einem rechteckigen Stück Blech mit einer Länge von $a = 16$ cm und einer Breite von $b = 10$ cm werden an den Ecken kongruente Quadrate ausgeschnitten und aus dem Rest eine Schachtel gebildet. Wie muss man die Seitenlänge der auszuschneidenden Quadrate wählen, um eine Schachtel von größtem Rauminhalt zu erhalten? Wie groß ist dieser maximale Inhalt?

2. Einem gleichschenkligen Trapez ($a = 6$ cm, $c = 2$ cm, $h = 4$ cm) soll das flächengrößte Rechteck einbeschrieben werden, von dem eine Seite in der Basis des Trapezes liegt. Bestimme die Seitenlängen und den Flächeninhalt des Rechtecks!

3. Welcher Punkt der Hyperbel $2x^2 - 3y^2 = 6$ hat vom Punkt $P(5 \mid 0)$ den kleinsten Abstand?

4. Gegeben ist die Funktionsschar $f_t(x) = tx - (1-t)x^2$ mit $(t \neq 1\ ;\ t \neq 0)$. Für welchen Wert t wird der Inhalt der von der zugehörigen Kurve und der x-Achse eingeschlossenen Fläche ein Extremwert. Wie groß ist er?

5. Die Zahl 60 soll so in zwei Summanden zerlegt werden, dass deren Produkt ein Maximum wird.

6. Die Fabrik F liegt abseits der geradlinigen Strasse von A nach B , wobei der Winkel $\beta = \sphericalangle(ABF)$ ein rechter ist. ($\overline{AB} = 1500$m ; $\overline{BF} = 600$m) Sie soll von A aus an die Wasserleitung angeschlossen werden. Die Kosten für die Verlegung betragen auf der Strasse $u = 72$ Euro/m und im Gelände $v = 90$ Euro/m.

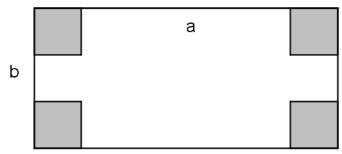
   In welcher Entfernung s von A muß die geradlinige Abzweigung von der Straße nach F erfolgen, damit es möglichst kostengünstig wird?

7. Ein rechteckiges Fenster mit aufgesetztem Rundbogen soll bei möglichst großer Fläche eine Umrahmung von nur 6 m haben. Welche Maße sind für das Fenster zu wählen? Wie groß ist die Fläche?

8. Das Fenster aus Aufgabe 7 soll eine Fläche von 250 dm^2 erhalten. Wie ist es auszuführen, damit die Kosten für den Rahmen minimal werden?

Lösungen

1. Skizze:



Offensichtlich benötigt man eine Formel für das Volumen eines Quaders:

$$V = e \cdot f \cdot g$$

Ich wählte e, f, g, da in der Skizze a und b schon verwendet wurden. Nun werde ich für die Seitenlänge der herauszuschneidenden Quadrate die Variable x einführen. Es ergibt sich:

$$e = a - 2x \qquad f = b - 2x \qquad g = x$$

Eingesetzt in die Volumenformel bekommen wir eine Funktion, die nur noch von der Variablen x abhängt:

$$V(x) = (a-2x)(b-2x)\cdot x = (16-2x)(10-2x)\cdot x = 4x^3-52x^2+160x \qquad (0 < x < 5)$$

Der Definitionsbereich ergibt sich aus der Überlegung, dass x nicht größer sein darf als $\frac{b}{2}$. Die Zielfunktion wird nun abgeleitet und es wird das Maximum bestimmt:

$$V'(x) = 12x^2 - 104x + 160$$

$$0 = x^2 - \frac{26}{3}x + \frac{40}{3}$$

$$x_{1,2} = \frac{26}{6} \pm \sqrt{\left(\frac{26}{6}\right)^2 - \frac{40}{3}}$$

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = \frac{20}{3} \text{ entfällt, siehe } D_f$$

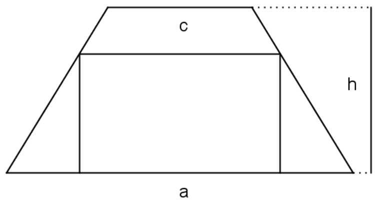
$$V''(x) = 24x - 104$$

$$V''(2) = -56 \;\; < 0 \Rightarrow \text{ Maximum}$$

$$V(2) = \underline{\underline{144}}$$

Die Seiten der Quadrate müssen eine Länge von 2 cm besitzen, damit die Schachtel ein maximales Volumen von 144 cm^2 hat.

2. Skizze:



Hier benötigen wir eine Formel zur Berechnung der Fläche:

$$A = d \cdot e$$

Aus der Skizze ist leicht zu erkennen, dass sich über den Winkel α (der Winkel an einem der beiden unteren Eckpunkte des Trapezes) folgende Ausdrücke ergeben:

$$\tan(\alpha) = \frac{h}{0,5(a-c)} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\tan(\alpha) = \frac{d}{0,5(a-e)} = 2$$

$$d = a - e$$

Es folgt die Zielfunktion:

$$A(e) = (a - e) \cdot e$$

Durch Differentiation bestimmt man das Maximum:

$$A'(e) = a - 2e$$

$$0 = a - 2e$$

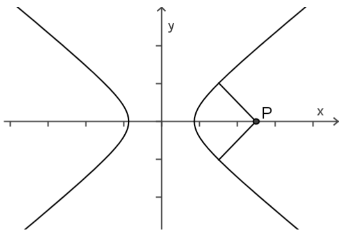
$$e = \frac{a}{2} = 3$$

$$A(3) = \underline{\underline{9}} \qquad \Rightarrow \underline{\underline{e = d = 3}}$$

Auf die Überprüfung der zweiten Ableitung kann man sicher verzichten, denn sie ist konstant -2. Es muss sich also um ein Maximum handeln.

Für einen maximalen Flächeninhalt von 9 cm^2 muss das Rechteck ein Quadrat mit der Seitenlänge 3 cm sein.

3. Skizze:



Den Abstand von zwei Punkten berechnet man folgendermaßen:

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

Nun müssen wir die Hyperbelgleichung nach y umstellen:

$$y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}x^2 - 2}$$

Eingesetzt ergibt sich:

$$d(x) = \sqrt{(5 - x)^2 + \left(0 - \sqrt{\frac{2}{3}x^2 - 2}\right)^2} = \sqrt{23 - 10x + \frac{5}{3}x^2}$$

Die Zielfunktion wird abgeleitet und auf Extrema untersucht:

$$d'(x) = \frac{\frac{10}{3}x - 10}{2\sqrt{23 - 10x + \frac{5}{3}x^2}}$$

$$0 = \frac{10}{3}x - 10$$

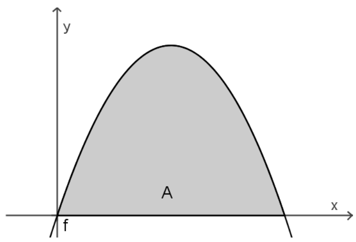
$$x = 3$$

Eigentlich müsste man mit der zweiten Ableitung prüfen, ob es sich tatsächlich um ein Extremum handelt. Allerdings ist mir der Aufwand für den relativ geringen Nutzen zu groß. Abgesehen davon weiß ich, dass es sich um ein Minimum handelt.

Setzt man das Ergebnis nun in die Hyperbelgleichung ein, so erhält man die Punkte:

$$\underline{\underline{Q_1(3|2)}} \qquad \underline{\underline{Q_2(3|-2)}}$$

4. Skizze:



Um die Grenzen für die Integration zu bestimmen, werde ich als erstes die Nullstellen der Schar berechnen:

$$f_t(x) = tx - (1-t)x^2$$

$$0 = x(t - x + tx)$$

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = \frac{t}{1-t}$$

In diesen Grenzen werde ich die Schar nun integrieren:

$$A = \int_0^{\frac{t}{1-t}} \left[tx - (1-t)x^2 \right] \, dx$$

$$A(t) = \frac{t^3}{6(1-t)^2}$$

Die Zielfunktion wird nun differenziert und auf Extrema untersucht:

$$A'(t) = \frac{3t^2 - t^3}{6 \cdot (1-t)^3}$$

$$0 = t^2 \cdot (3-t)$$

$$t_1 = 3 \qquad t_2 = 0 \;\; \text{entfällt, da } t \neq 0$$

$$A''(t) = \frac{t}{(1-t)^4}$$

$$A''(3) = \frac{3}{16} \;\; > \;\; 0 \;\; \Rightarrow \text{Minimum}$$

$$A(3) = \underline{\underline{\frac{9}{8}}}$$

Für die Funktion der Schar f_t, die den minimalen Flächeninhalt $A = \frac{9}{8}$ FE mit der x-Achse einschließt, gilt: $t = 3$.

5. Ich wähle für die beiden Summanden die Variablen a und b und für das Produkt die Variable c. So ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$a + b = 60$$

$$a \cdot b = c$$

Nach Umstellen und Einsetzen folgt:

$$c(a) = a \cdot (60 - a)$$

Nach Differentiation wird die Zielfunktion nun auf Extrema untersucht:

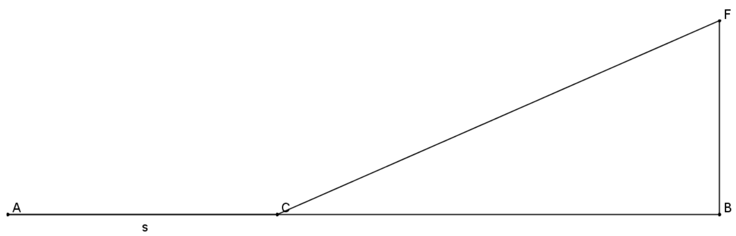
$$c'(a) = 60 - 2a$$

$$0 = 60 - 2a$$

$$a = \underline{\underline{30}} \;\Rightarrow\; b = \underline{\underline{30}} \;\Rightarrow\; c = \underline{\underline{900}}$$

Damit das Produkt der beiden Summanden der Zahl 60 maximal wird, müssen die beiden Summanden jeweils 30 sein. Das maximale Produkt beträgt 900.

6. Skizze:



Die folgenden Bezeichnungen sind an die Skizze angelehnt. Der Preis setzt sich folgendermaßen zusammen:

$$P = 72 \cdot \overline{AC} + 90 \cdot \overline{CF}$$

Über den Satz des Pythagoras kommt man zu folgenden Ausdrücken:

$$\overline{CF} = \sqrt{\overline{CB}^2 + \overline{BF}^2} \quad \text{mit} \quad \overline{CB} = \overline{AB} - \overline{AC}$$

$$\overline{CF} = \sqrt{\left(\overline{AB} - \overline{AC}\right)^2 + \overline{BF}^2}$$

Durch Einsetzen ergibt sich für die Preisfunktion:

$$P\left(\overline{AC}\right) = 72 \cdot \overline{AC} + 90 \cdot \sqrt{\left(\overline{AB} - \overline{AC}\right)^2 + \overline{BF}^2}$$

$$P(s) = 72 \cdot s + 90 \cdot \sqrt{(1500 - s)^2 + 600^2}$$

Untersuchung der Zielfunktion auf Extrema durch Differentiation:

$$P'(s) = \frac{90s - 135000}{\sqrt{(1500 - s)^2 + 600^2}} + 72$$

$$0 = \frac{90s - 135000}{\sqrt{(1500 - s)^2 + 600^2}} + 72$$

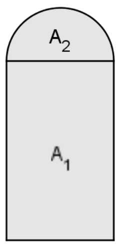
$$s = \underline{\underline{700 \text{ m}}}$$

$$P(700) = \underline{\underline{140.400 \text{ Euro}}}$$

Die zweite Ableitung habe ich mir wieder gespart. Wer will, kann sie gern prüfen.

Um möglichst kostengünstig zu bauen, muss der Abzweig in einer Entfernung von $s = 700$ m liegen. Der minimale Preis beträgt 140.400 Euro.

7. Skizze:



Für den Umfang u und die Flächen A_R (Rechteckfläche) und A_K (Halbkreisfläche) gelten folgende Formeln:

$$A_{Ges} = A_R + A_K$$

$$A_R = a \cdot b$$

$$A_K = \frac{1}{2}\pi r^2$$

$$u = 2a + b + c = 6$$

b ist hier die Grundseite des Rechtecks. c ist die Bogenlänge des Halbkreises. Es folgt:

$$c = r\pi \quad \text{mit} \quad r = \frac{b}{2}$$

$$A_{Ges}(b) = \frac{1}{2}b \cdot \left(6 - b - \frac{1}{2}\pi b\right) + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

Die Zielfunktion wird abgeleitet und auf Extrema untersucht:

$$A'_{Ges} = \left(-1 - \frac{1}{4}\pi\right) \cdot b + 3$$

$$0 = \left(-1 - \frac{1}{4}\pi\right) \cdot b + 3$$

$$b = \underline{\underline{\frac{3}{1 + \frac{1}{4}\pi}}} \qquad c = \underline{\underline{\frac{3\pi}{2 + \frac{1}{2}\pi}}} \qquad a = \underline{\underline{\frac{6}{4 + \pi}}}$$

Die zweite Ableitung ist konstant $-1-\frac{1}{4}\pi \; < \; 0$. Es muss sich also um ein Maximum handeln. Folgendes ergibt sich für die Fläche:

$$A\left(\frac{3}{1 + \frac{1}{4}\pi}\right) \approx \underline{\underline{2,52}} \text{ m}^2$$

8. Wir nehmen die Gleichungen aus Aufgabe 7:

$$A_R + A_K = 250$$

$$A_R = a \cdot b$$

$$A_K = \frac{1}{2}\pi r^2 \quad \text{mit} \quad r = \frac{b}{2}$$

$$u = 2a + b + c \quad \text{mit} \quad c = \frac{\pi}{2} \cdot b$$

Daraus ergeben sich:

$$250 = a \cdot b + \frac{1}{2}\pi \left(\frac{b}{2}\right)^2 = a \cdot b + \frac{\pi}{8} \cdot b^2$$

$$\Rightarrow \ a = \frac{250}{b} - \frac{\pi}{8} \cdot b$$

$$u(b) = \frac{500}{b} + \left(\frac{\pi}{4} + 1\right) \cdot b$$

Differentiation und Untersuchung auf Extrema:

$$u'(b) = -\frac{500}{b^2} + \frac{\pi}{4} + 1$$

$$0 = -\frac{500}{b^2} + \frac{\pi}{4} + 1$$

$$b = \sqrt{\frac{500}{\frac{\pi}{4} + 1}}$$

$$u''(b) = \frac{1000}{b^3}$$

$$u''\left(\sqrt{\frac{500}{\frac{\pi}{4}+1}}\right) \;>\; 0 \;\Rightarrow \text{Minimum}$$

$$b \approx \underline{\underline{16,73}} \qquad a \approx \underline{\underline{21,51}} \qquad c \approx \underline{\underline{26,29}}$$

Für den minimalen Umfang ergibt sich:

$$u\left(\sqrt{\frac{500}{\frac{\pi}{4}+1}}\right) \approx \underline{\underline{59,76 \text{ dm}}}$$