Analysis 15

www.schulmathe.npage.de

Aufgaben

1. Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1} \quad (x \in D_f)$$

   a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion f an.
   Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist.
   Geben Sie alle Nullstellen und Polstellen sowie die Extrempunkte (Koordinaten dieser Punkte und Art der Extrema) der Funktion f an.
   Untersuchen Sie die Funktion auf Existenz von Asymptoten. Geben Sie die Gleichung aller gefundenen Asymptoten an.
   Ermitteln Sie den Wendepunkt der Funktion f.
   Zeichnen Sie den Graph der Funktion f für $-5 \leq x \leq 5$.

   b) Ermitteln Sie rechnerisch die Gleichung der Tangente t_1 an die Funktion f an der Stelle $x = 2$.
   Die Funktion f besitzt eine weitere Tangente t_2, die parallel zu t_1 verläuft.
   Geben Sie den Berührungspunkt dieser Tangente mit der Funktion f an.

2. Für jede reelle Zahl t $(t > 0)$ ist eine Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x) = \frac{1}{t} \cdot (x - 2t) \cdot \sqrt{x}$$

   a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich und die Nullstellen der Funktion f_t an.
   Die Funktion f_t besitzt genau einen Extrempunkt P_t.

Zeigen Sie, dass für diesen Punkt P_t gilt:

$$P_t\left(\frac{2}{3}t \,\middle|\, -\frac{4}{3}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}t}\right)$$

Untersuchen Sie die Art des Extremums.
Ermitteln Sie die Gleichung der Ortskurve der Extrempunkte der Funktion f_t.
Begründen Sie, dass die Funktion f_t keinen Wendepunkt besitzt.

b) Es gibt genau einen Wert t, für den der Abstand des lokalen Extrempunktes der Funktion f_t vom Koordinatenursprung $\frac{1}{12}\sqrt{73}$ beträgt. Ermitteln Sie diesen Wert t.

c) Die Tangente an den Graphen der Funktion f_t im Punkt $R_t(2t|f_t(2t))$und die Koordinatenachsen bilden ein Dreieck. Berechnen Sie den Wert t, für den das Dreieck gleichschenklig ist.

Lösungen

1. a) Die Funktion f ist nicht definiert, wenn der Nenner gleich Null ist. Es ergibt sich für den Definitionsbereich:

$$D_f\left\{x \in R \wedge x \neq 1;\ x \neq -1\right\}$$

Ist der Graph der Funktion f punktsymmetrisch zum Ursprung, muss gelten: $f(-x) = -f(x)$.

$$\begin{aligned}
f(-x) &= \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} \\
f(-x) &= \frac{-x^3}{x^2 - 1} \\
f(-x) &= -f(x)
\end{aligned}$$

An den Nullstellen Nullstellen ist der Funktionswert Null:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{x^3}{x^2 - 1} \\
0 &= x^3 \\
x_0 &= 0
\end{aligned}$$

An den Polstellen ist die Funktion nicht definiert: $x_{P_1} = 1,\ x_{P_2} = -1$

Durch Untersuchung der ersten Ableitung f' auf Nullstellen findet man die Extrempunkte der Funktion f:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^3}{x^2 - 1} \\
f'(x) &= \frac{3x^2 \cdot (x^2 - 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} \\
&= \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2 - 1)^2} \\
&= \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
0 &= x^4 - 3x^2 \\
0 &= x^2(x^2 - 3) \\
x_1 &= 0 \\
x_2 &= \sqrt{3} \\
x_3 &= -\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

Um die Art und Existenz der möglichen Extrema zu prüfen, ermittelt man die zweite Ableitung f'':

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} \\
f''(x) &= \frac{(4x^3 - 6x) \cdot (x^2-1)^2 - (x^4 - 3x^2) \cdot 2 \cdot (x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2-1)^4} \\
&= \frac{(4x^3 - 6x) \cdot (x^2 - 1) - 4x \cdot (x^4 - 3x^2)}{(x^2-1)^3} \\
&= \frac{4x^5 - 4x^3 - 6x^3 + 6x - 4x^5 + 12x^3}{(x^2-1)^3} \\
&= \frac{2x^3 + 6x}{(x^2-1)^3} \\
f''(0) &= \frac{0+0}{-1} = 0 \\
f''\left(\sqrt{3}\right) &= \frac{2\sqrt{3}^3 + 6\sqrt{3}}{2^3} > 0 \\
f''\left(-\sqrt{3}\right) &= \frac{-2\sqrt{3}^3 - 6\sqrt{3}}{2^3} < 0
\end{aligned}
$$

Die Stelle $x = 0$ ist keine Extremstelle. Die Extrempunkte sind $P_{Max}\left(-\sqrt{3}\middle| -\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$ und $P_{Min}\left(\sqrt{3}\middle|\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$.

Es existieren zwei senkrechte Asymptoten an den Polstellen: $x = -1$ und $x = 1$. Zur Untersuchung auf waagerechte Asymptoten bestimmt man die Grenzwerte:

$$\begin{aligned}
& \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2-1} \\
= & \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\cdot x}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} \\
= & \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{1-\frac{1}{x^2}} \\
= & \pm\infty
\end{aligned}$$

Es existiert keine waagerechte Asymptote. Zur Untersuchung auf schräge Asymptoten führt man Polynomdivision durch:

$$\begin{array}{rcccl}
x^3 & : & (x^2-1) & = & x + \dfrac{x}{x^2-1} \\
\underline{-(x^3-x)} & & & & \\
x & & & &
\end{array}$$

Nun bildet man die Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\pm\infty} x + \underbrace{\frac{x}{x^2-1}}_{0}$$

Die schräge Asymptote hat die Gleichung $y = x$.

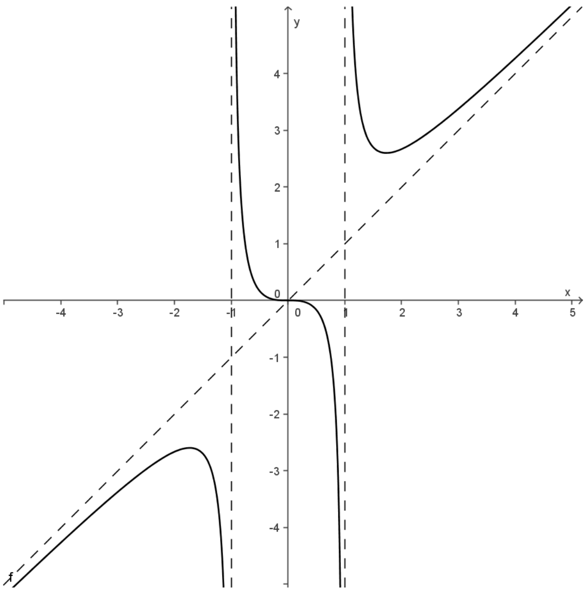
Um den Wendepunkt zu ermitteln, bestimmt man die Nullstelle der zweiten Ableitung f'':

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3} \\
0 &= 2x^3+6x \\
0 &= x(2x^2+6) \\
x_1 &= 0 \\
x_{2,3} &= \pm\sqrt{-3}
\end{aligned}$$

$x_{2,3} = \pm\sqrt{-3}$ entfällt, da $\sqrt{-3}$ nicht definiert ist. Mit der dritten Ableitung ist nun zu prüfen, ob $x = 0$ tatsächlich um eine Wendestelle ist.

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3} \\
f'''(x) &= \frac{(6x^2+6)(x^2-1)^3-(2x^3+6x)\cdot 3(x^2-1)^2\cdot 2x}{(x^2-1)^6} \\
&= \frac{(6x^2+6)(x^2-1)-6x\cdot(2x^3+6x)}{(x^2-1)^4} \\
&= \frac{6x^4-6x^2+6x^2-6-12x^4-36x^2}{(x^2-1)^4} \\
&= \frac{-6x^4-36x^2-6}{(x^2-1)^4} \\
f'''(0) &= \frac{-6}{(-1)^4} \neq 0
\end{aligned}
$$

Die Funktion besitzt einen Wendepunkt $W(0|0)$.



b) Zur Bestimmung der Geradengleichung der Tangente bestimmt man den Anstieg aus der ersten Ableitung f' und setzt anschließend den Punkt $P(2|f(2))$ ein:

$$\begin{aligned}
f'(2) &= \frac{2^4 - 3 \cdot 2^2}{(2^2-1)^2} \\
&= \frac{4}{9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(2) &= \frac{2^3}{2^2-1} \\
&= \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y &= mx + n \\
\frac{8}{3} &= \frac{4}{9} \cdot 2 + n \\
n &= \frac{16}{9}
\end{aligned}$$

$$t_1: \quad y = \frac{4}{9}x + \frac{16}{9}$$

Aufgrund der Punktsymmetrie zum Ursprung, muss der Berührungspunkt $B\left(-2\middle| -\frac{8}{3}\right)$ sein.

2. a) Die Funktion f_t ist nicht definiert, wenn der Term unter der Wurzel negativ ist. Also gilt für den maximalen Definitionsbereich:

$$D_f\left\{x \in R \wedge x \geq 0\right\}$$

An den Nullstellen ist der Funktionswert $f_t(x) = 0$:

$$0 = \frac{1}{t} \cdot (x - 2t) \cdot \sqrt{x}$$

$$\begin{aligned}
0 &= x - 2t \\
x_1 &= 2t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \sqrt{x} \\
x_2 &= 0
\end{aligned}$$

Ist der Punkt P_t ein Extrempunkt der Funktion, muss der Punkt die Funktionsgleichung erfüllen:

$$\begin{aligned} f_t\left(\frac{2}{3}t\right) &= \frac{1}{t}\cdot\left(\frac{2}{3}t-2t\right)\cdot\sqrt{\frac{2}{3}t} \\ &= -\frac{4}{3}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}t} \end{aligned}$$

Des weiteren muss der Wert der ersten Ableitung $f_t'(x)$ an dieser Stelle Null sein:

$$\begin{aligned} f_t(x) &= \frac{1}{t}\cdot(x-2t)\cdot\sqrt{x} \\ f_t'(x) &= \frac{1}{t}\cdot\sqrt{x}+\frac{1}{t}\cdot(x-2t)\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{t}+\frac{x}{2t\cdot\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}} \\ f_t'\left(\frac{2}{3}t\right) &= \frac{\sqrt{\frac{2}{3}t}}{t}+\frac{\frac{2}{3}t}{2t\cdot\sqrt{\frac{2}{3}t}}-\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}t}} \\ &= \frac{2\cdot\frac{2}{3}t+\frac{2}{3}t-2t}{2t\cdot\sqrt{\frac{2}{3}t}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Um die Art und tatsächliche Existenz des Extremums zu ermitteln, bestimmt man den Wert der zweiten Ableitung an dieser Stelle:

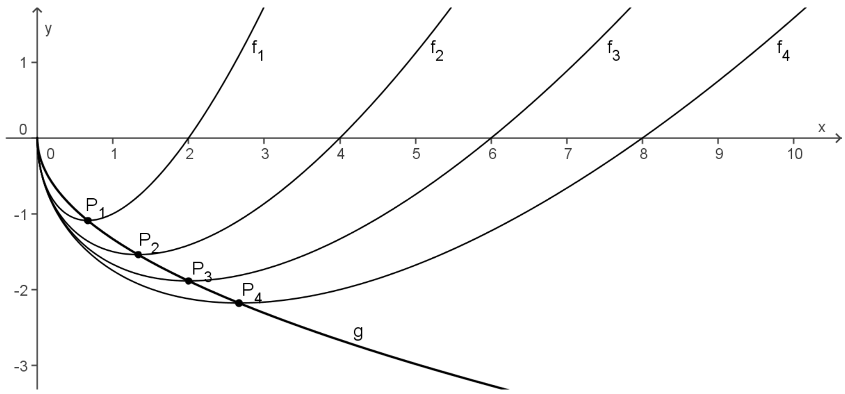
$$\begin{aligned} f_t'(x) &= \frac{\sqrt{x}}{t}+\frac{\sqrt{x}}{2t\cdot}-\frac{1}{\sqrt{x}} \\ f_t''(x) &= \frac{1}{2t}\cdot x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{4t}\cdot x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{t}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}\cdot x^{-\frac{1}{2}}+\frac{t}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}\cdot x^{-1}\right) \\ &= \frac{1}{t}\cdot\left(\frac{x}{2\sqrt{x}\cdot x}+\frac{x}{4\sqrt{x}\cdot x}+\frac{t}{2\sqrt{x}\cdot x}\right) \\ &= \frac{1}{t}\cdot\left(\frac{3x+2t}{4x\cdot\sqrt{x}}\right) \end{aligned}$$

$$f_t''\left(\frac{2}{3}t\right) = \frac{1}{t}\cdot\left(\frac{3\cdot\frac{2}{3}t+2t}{4\cdot\frac{2}{3}t\cdot\sqrt{\frac{2}{3}t}}\right) > 0$$

Der Wert der zweiten Ableitung ist immer positiv, da $t > 0$. Es handelt sich somit um einen Minimumpunkt.

Die Ortskurve der Extrempunkte ergibt sich durch Einsetzen des Parameters in die Funktionsgleichung:

$$\begin{aligned} x &= \frac{2}{3}t \\ t &= \frac{3}{2}x \\ y &= \frac{2}{3x}\cdot(x-3x)\cdot\sqrt{x} \\ y &= -\frac{4}{3}\cdot\sqrt{x} \end{aligned}$$



Wenn die Funktion f einen Wendepunkt besitzt, muss an einer Stelle x_0 die zweite Ableitung $f''(x_0) = 0$ sein. Betrachtet man die zweite Ableitung, so sieht man, dass dies eintritt, wenn der Term $3x+2t = 0$. Dies ist nicht möglich, da $t > 0$ und $x \geq 0$.

b) Für den Abstand zweier Punkte gilt:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \\ \left(\frac{1}{12}\cdot\sqrt{73}\right)^2 &= (x-0)^2+(y-0)^2 \\ \frac{73}{144} &= \left(\frac{2}{3}t\right)^2+\left(-\frac{4}{3}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}t}\right)^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{73}{144} &= \frac{4}{9}t^2 + \frac{16}{9} \cdot \frac{2}{3}t \\
0 &= t^2 + \frac{8}{3}t - \frac{73}{64} \\
t_{1,2} &= -\frac{4}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \frac{73}{64}} \\
&= -\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{73}{64}} \\
&= -\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{1024}{576} + \frac{657}{576}} \\
&= -\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{1681}{576}} \\
&= -\frac{4}{3} \pm \frac{41}{24} \\
t_1 &= \frac{3}{8} \\
t_2 &= -\frac{73}{24}
\end{aligned}
$$

Der Wert t_2 entfällt, da $t > 0$. Für $t = \frac{3}{8}$ hat der Extrempunkt der Funktion f_t vom Ursprung den Abstand $\frac{1}{12} \cdot \sqrt{73}$.

c) Mir der ersten Ableitung f' ermittelt man den Anstieg der Tangente:

$$
\begin{aligned}
f_t'(2t) &= \frac{\sqrt{2t}}{t} + \frac{\sqrt{2t}}{2t\cdot} - \frac{1}{\sqrt{2t}} \\
&= \frac{6t - 2t}{2t\sqrt{2t}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2t}}
\end{aligned}
$$

Damit eine Gerade, die nicht durch den Ursprung geht, ein gleichschenkliges Dreieck mit den Koordinatenachsen bildet, muss ihr Anstieg $m = 1$ sein. Die Tangente geht nicht durch den Ursprung, da $R_t(2t|0)$.

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{2}{\sqrt{2t}} \\
t &= 2
\end{aligned}
$$