

Analysis 4

www.schulmathe.npage.de

Aufgaben

Zu jedem $t > 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x) = t \cdot [\ln(x+t)]^2 \quad (x+t) \in \mathbb{R}^+$$

- a) Untersuchen Sie die Funktion f_t auf gemeinsame Punkte mit der x -Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte.
Zeichnen Sie den Graph der Funktion f_t für $-2 \leq x \leq 3$ samt Asymptote.
- b) g_t sei die Gerade durch den Tiefpunkt und den Wendepunkt von f_t .
 h_t sei die Senkrechte zu g_t durch den Tiefpunkt von f_t .
 g_t und h_t schneiden die senkrechte Asymptote von f_t in G_t bzw. H_t .
Berechnen Sie die Koordinaten dieser Punkte. Welche Kurve bilden die Punkte H_t , wenn t alle zugelassenen Werte annimmt?
Für welches t haben G_t und H_t die kleinste Entfernung? Wie groß ist diese?
- c) Die x -Achse, der Graph der Funktion f_t und die Gerade $x = e - t$ begrenzen eine Fläche.
Berechnen Sie deren Inhalt $A(t)$.

Lösungen

a) An den Nullstellen ist der Funktionswert $f_t(x) = 0$:

$$\begin{aligned}0 &= t \cdot [\ln(x+t)]^2 \\0 &= [\ln(x+t)]^2 \\0 &= \ln(x+t) \\e^0 &= x+t \\1 &= x+t \\x &= 1-t\end{aligned}$$

Der Punkt $S_x(1-t|0)$ liegt auf der x -Achse und auf dem Graphen der Funktion f_t .

Wird der Logarithmand an einer Stelle x Null, so ist die Stelle x eine Polstelle der Funktion f_t :

$$\begin{aligned}0 &= x+t \\x &= -t\end{aligned}$$

Die Gerade $x = -t$ ist eine senkrechte Asymptote der Funktion f_t .

Existiert der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} f_t(x)$, so existiert eine waagerechte Asymptote:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} t \cdot [\ln(x+t)]^2 = \infty$$

Die Funktion f_t besitzt keine waagerechte Asymptote.

Zur Bestimmung der Extrema untersucht man die erste Ableitung f'_t auf Nullstellen:

$$\begin{aligned}f_t(x) &= t \cdot [\ln(x+t)]^2 \\f'_t(x) &= 2t \cdot \ln(x+t) \cdot (x+t)^{-1} \\&= \frac{2t \cdot \ln(x+t)}{x+t} \\0 &= 2t \cdot \ln(x+t) \\e^0 &= x+t \\x &= 1-t\end{aligned}$$

Mit der zweiten Ableitung f_t'' bestimmt man die Art des Extremum:

$$\begin{aligned}
 f_t'(x) &= \frac{2t \cdot \ln(x+t)}{x+t} \\
 f_t''(x) &= \frac{2t \cdot (x+t)^{-1} \cdot (x+t) - 2t \cdot \ln(x+t)}{(x+t)^2} \\
 f_t''(x) &= \frac{2t - 2t \cdot \ln(x+t)}{(x+t)^2} \\
 f_t''(1-t) &= \frac{2t - 2t \cdot \ln(1-t+t)}{(1-t+t)^2} \\
 &= \frac{2t - 2t \cdot 0}{1^2} \\
 &= 2t > 0
 \end{aligned}$$

Der Punkt $P_{Min}(1-t|0)$ ein Minimumpunkt der Funktion f_t .

Zur Bestimmung der Wendestellen untersucht man die zweite Ableitung f_t'' auf Nullstellen:

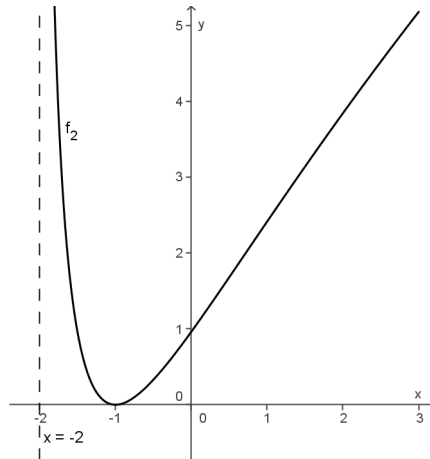
$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{2t - 2t \cdot \ln(x+t)}{(x+t)^2} \\
 0 &= 2t - 2t \cdot \ln(x+t) \\
 1 &= \ln(x+t) \\
 e &= x+t \\
 x &= e-t
 \end{aligned}$$

Mit der dritten Ableitung f_t''' prüft man die Existenz der Wendestelle:

$$\begin{aligned}
 f_t''(x) &= \frac{2t - 2t \cdot \ln(x+t)}{(x+t)^2} \\
 f_t'''(x) &= \frac{-2t \cdot (x+t)^{-1} \cdot (x+t)^2 - [2t - 2t \cdot \ln(x+t)] \cdot 2 \cdot (x+t)}{(x+t)^4} \\
 &= \frac{-2t - 4t + 4t \cdot \ln(x+t)}{(x+t)^3} \\
 &= \frac{-6t + 4t \cdot \ln(x+t)}{(x+t)^3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_t'''(e-t) &= \frac{-6t + 4t \cdot \ln(e-t+t)}{(e-t+t)^3} \\
 &= \frac{-6t + 4t}{e^3} \\
 &= \frac{-2t}{e^3} \neq 0
 \end{aligned}$$

Der Punkt $W(e-t|t)$ ist ein Wendepunkt der Funktion f_t .



- b) Für den Anstieg m_g der Geraden g durch die Punkte $P_{Min}(1-t|0)$ und $W(e-t|t)$ gilt:

$$m_g = \frac{t-0}{e-t-(1-t)} = \frac{t}{e-1}$$

Setzt man nun den Punkt P_{Min} und den Anstieg m_g in die allgemeine Geradengleichung $y = mx + n$ ein, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{t}{e-1} \cdot (1-t) + n \\
 n &= \frac{-t + t^2}{e-1} \\
 g_t(x) &= \frac{t}{e-1} \cdot x + \frac{t^2 - t}{e-1}
 \end{aligned}$$

Für den Anstieg m_h der Geraden h_t gilt:

$$m_h = -\frac{1}{m_g} = -\frac{e-1}{t} = \frac{1-e}{t}$$

Setzt man nun den Punkt P_{Min} und den Anstieg m_h in die allgemeine Geradengleichung $y = mx + n$ ein, ergibt sich:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1-e}{t} \cdot (1-t) + n \\ n &= -\frac{1-t-e+te}{t} \\ h_t(x) &= \frac{1-e}{t} \cdot x - \frac{1-t-e+te}{t} \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Punkte G_t und H_t setzt man die Polstelle $x = -t$ in die Geradengleichungen ein:

$$\begin{aligned} g_t(-t) &= \frac{t}{e-1} \cdot (-t) + \frac{t^2-t}{e-1} \\ &= \frac{-t^2+t^2-t}{e-1} \\ &= \frac{-t}{e-1} \end{aligned}$$

$G_t \left(-t \left| \frac{t}{1-e} \right. \right)$ ist der Schnittpunkt der Geraden g_t mit der senkrechten Asymptote der Funktion f_t .

$$\begin{aligned} h_t(-t) &= \frac{1-e}{t} \cdot (-t) - \frac{1-t-e+te}{t} \\ &= \frac{-t+te-1+t+e-te}{t} \\ &= \frac{e-1}{t} \end{aligned}$$

$H_t \left(-t \left| \frac{e-1}{t} \right. \right)$ ist der Schnittpunkt der Geraden h_t mit der senkrechten Asymptote der Funktion f_t .

Die Ortskurve der Punkte H_t ergibt sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned}x &= -t \\t &= -x \\y &= \frac{e-1}{t} \\y &= \frac{1-e}{x}\end{aligned}$$

Für den Abstand $d(t)$ der Punkte G_t und H_t gilt:

$$d(t) = \frac{e-1}{t} - \frac{-t}{e-1} = \frac{(e-1)^2 + t^2}{t \cdot (e-1)}$$

Zur Bestimmung der Extrema untersucht man die erste Ableitung d' der Zielfunktion auf Nullstellen:

$$\begin{aligned}d(t) &= \frac{(e-1)^2 + t^2}{t \cdot (e-1)} \\d'(t) &= \frac{2t \cdot t \cdot (e-1) - [(e-1)^2 + t^2] \cdot (e-1)}{[t \cdot (e-1)]^2} \\&= \frac{2t^2 \cdot (e-1) - (e-1)^3 - t^2 \cdot (e-1)}{t^2 \cdot (e-1)^2} \\&= \frac{t^2 - (e-1)^2}{t^2 \cdot (e-1)} \\0 &= \frac{t^2 - (e-1)^2}{t^2 \cdot (e-1)} \\0 &= t^2 - (e-1)^2 \\t^2 &= (e-1)^2 \\t &= \pm(e-1)\end{aligned}$$

Um die Art der Extrema zu bestimmen, untersucht man die zweite Ableitung d'' :

$$\begin{aligned}
 d'(t) &= \frac{t^2 - (e-1)^2}{t^2 \cdot (e-1)} \\
 d''(t) &= \frac{2t \cdot t^2 \cdot (e-1) - [t^2 - (e-1)^2] \cdot 2t \cdot (e-1)}{[t^2 \cdot (e-1)]^2} \\
 &= \frac{2t^3 \cdot (e-1) - [t^2 - (e-1)^2] \cdot 2t \cdot (e-1)}{t^4 \cdot (e-1)^2} \\
 &= \frac{2t^2 - [t^2 - (e-1)^2] \cdot 2}{t^3 \cdot (e-1)} \\
 &= \frac{2 \cdot (e-1)^2}{t^3 \cdot (e-1)} \\
 d''(e-1) &= \frac{2 \cdot (e-1)^2}{(e-1)^3 \cdot (e-1)} \\
 &= \frac{2}{(e-1)^2} > 0 \\
 d''(1-e) &= \frac{2 \cdot (e-1)^2}{(1-e)^3 \cdot (e-1)} \\
 &= \frac{-2}{e-1} < 0
 \end{aligned}$$

Für $t = e - 1$ haben die Punkte G_t und H_t den minimalen Abstand von $d = 2$.

- c) Zur Berechnung des Flächeninhalts $A(t)$ integriert man die Funktion f_t in den Grenzen $x_1 = 1 - t$ (Nullstelle) und $x_2 = e - t$:

$$\begin{aligned}
 A(t) &= \int_{1-t}^{e-t} t \cdot [\ln(x+t)]^2 dx \\
 &= t \cdot \int_{1-t}^{e-t} [\ln(x+t)]^2 dx
 \end{aligned}$$

Durch die Substitution $z = \ln(x+t)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 z &= \ln(x+t) \\
 e^z &= x+t \\
 dx &= e^z dz
 \end{aligned}$$

Dies und die neuen Grenzen $z_1 = 0$ und $z_2 = 1$ werden nun eingesetzt:

$$A(t) = t \cdot \int_0^1 z^2 \cdot e^z dz$$

Durch zweifache partielle Integration ergibt sich die Stammfunktion:

$$\begin{aligned} A(t) &= t \cdot \left[z^2 \cdot e^z - \int_0^1 2z \cdot e^z dz \right] \\ &= t \cdot \left[z^2 \cdot e^z - \left(2z \cdot e^z - \int_0^1 2e^z dz \right) \right] \\ &= t \cdot \left[z^2 \cdot e^z - 2z \cdot e^z + 2e^z \right]_0^1 \\ &= t \cdot \left[e - 2e + 2e - 2 \right] \\ A(t) &= t \cdot (e - 2) \end{aligned}$$