

Algebra 1

www.schulmathe.npage.de

Aufgaben

1. Für welche reellen Zahlen m hat das folgende Gleichungssystem nur die triviale Lösung?

$$\begin{array}{r} x + 2y + mz = 0 \\ mx - y + 3z = 0 \\ \hline 2x + y + 9z = 0 \end{array}$$

2. Welche Punkte P_z der z -Achse haben vom Punkt $A(6|10|5)$ einen Abstand von $\sqrt{161}$ Längeneinheiten?
3. In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(3|2|1)$, $B(5|7|1)$, $C(0|c|1)$, $D(-2|4|1)$ und $S(5|7|8)$ gegeben.
 - a) Ermitteln Sie c so, dass das Dreieck ABC bei B einen rechten Winkel hat.
Nun sei $c = 9$.
 - b) Die Punkte A , B und C sind Eckpunkte der Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze S . Berechnen Sie das Volumen dieser Pyramide.
 - c) Weisen Sie nach, dass das Viereck $ABCD$ ein Quadrat ist.
 - d) Es existieren weitere Punkte P_i , so dass der Körper $ABCDP_i$ eine gerade Pyramide mit dem Volumen $V = \frac{116}{3}$ Volumeneinheiten ist. Berechnen Sie die Koordinaten aller möglichen Punkte P_i .
4. a) Stellen Sie \vec{x} als Linearkombination der Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} dar.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 20,5 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- b) Für welchen Wert von a lässt sich c als Linearkombination der Vektoren \vec{a} und \vec{b} darstellen?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 - a \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

- c) Zeigen Sie, dass es keine reelle Zahl a gibt, für die die Vektoren \vec{a} und \vec{b} parallel sind.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2a \\ 5 - a \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ a^2 - 8 \end{pmatrix}$$

5. In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(3|6|-2)$, $B(-3|9|4)$, $C(-2|3|4)$ und $D(0|2|2)$ gegeben.
- a) Zeigen Sie, dass das Viereck $ABCD$ ein Trapez, aber kein Parallelogramm ist.
- b) Berechnen Sie die Größe des Winkels $\sphericalangle DAB$ und den Flächeninhalt des Trapezes.

Lösungen

1. Das LGS hat nur die triviale Lösung, wenn die Determinante $D \neq 0$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ m & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 9 \end{vmatrix} = -9 + 12 + m^2 - (-2m + 3 + 18m)$$
$$0 \neq m^2 - 16m$$
$$m \neq 0$$
$$m \neq 16$$

Für alle $m \in \mathbb{R} \wedge m \neq 0 \wedge m \neq 16$ hat das LGS nur die triviale Lösung.

2. Für den Abstand $\overline{AP_z}$ gilt:

$$\begin{aligned} \overline{AP_z} &= \sqrt{(x_A - x_{P_z})^2 + (y_A - y_{P_z})^2 + (z_A - z_{P_z})^2} \\ (\overline{AP_z})^2 &= (x_A - x_{P_z})^2 + (y_A - y_{P_z})^2 + (z_A - z_{P_z})^2 \\ z_A - z_{P_z} &= \pm \sqrt{(\overline{AP_z})^2 - (x_A - x_{P_z})^2 - (y_A - y_{P_z})^2} \\ -z_{P_z} &= \pm \sqrt{161 - (6 - 0)^2 - (10 - 0)^2} - 5 \\ z_{P_z} &= 5 \pm \sqrt{25} \\ z_{P_{z_1}} &= 10 \\ z_{P_{z_2}} &= 0 \end{aligned}$$

Die Punkte $P_{10}(0|0|10)$ und $P_0(0|0|0)$ liegen auf der z -Achse und haben von A einen Abstand von $\sqrt{161}$ Längeneinheiten.

3. a) Bei der Betrachtung kann man z vernachlässigen, da $z_A = z_B = z_C$ und somit die Punkte A, B und C alle in einer Ebene liegen, die parallel zur $x - y$ -Ebene ist. Eine Gerade, die durch die Punkte A und B verläuft, hat den Anstieg $m_{\overline{AB}} = \frac{5}{2}$. Eine Gerade, die senkrecht dazu verläuft hat also den Anstieg $m_{\overline{BC}} = -\frac{2}{5}$. Nun kann man eine Geradengleichung aufstellen:

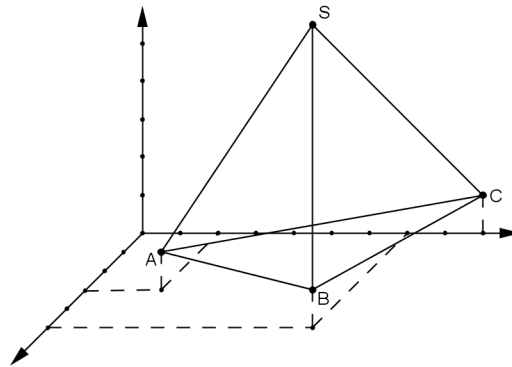
$$\begin{aligned} 7 &= -\frac{2}{5} \cdot 5 + n \\ n &= 9 \\ y &= -\frac{2}{5}x + 9 \end{aligned}$$

Diese Gerade verläuft durch die Punkte B und C . Zur Bestimmung von c setzt man den Punkt ein:

$$c = -\frac{2}{5} \cdot 0 + 9 = \underline{\underline{9}}$$

Für $c = 9$ hat das Dreieck ABC bei B einen rechten Winkel.

b) Skizze:



Für das Volumen einer Pyramide gilt:

$$V = \frac{1}{3} A_G \cdot h$$

Da ABC ein rechtwinkliges Dreieck ist, gilt für die Grundfläche:

$$A_G = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC}$$

S liegt genau über B . Somit gilt für h :

$$h = z_S - z_B$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot (z_S - z_B) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \sqrt{(5-3)^2 + (7-2)^2} \cdot \sqrt{(0-5)^2 + (9-7)^2} \cdot (8-1) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \sqrt{29} \cdot \sqrt{29} \cdot 7 \\ V &= \underline{\underline{\frac{203}{6}}} \end{aligned}$$

- c) Aus Aufgabenteil 3b weiß man schon, dass $\overline{AB} = \sqrt{29}$ und $\overline{BC} = \sqrt{29}$. Aus Aufgabenteil 3a ist bekannt, dass der Winkel bei B ein rechter ist. Es bietet sich an, die Längen der fehlenden Seiten zu berechnen. Somit wäre das Quadrat eindeutig bestimmt.

$$\begin{aligned}\overline{AD} &= \sqrt{(-2-3)^2 + (4-2)^2 + (1-1)^2} \\ \overline{AD} &= \sqrt{25+4+0} \\ \overline{AD} &= \sqrt{29}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{CD} &= \sqrt{(-2-0)^2 + (4-9)^2 + (1-1)^2} \\ \overline{CD} &= \sqrt{4+25+0} \\ \overline{CD} &= \sqrt{29}\end{aligned}$$

Alle Seiten sind gleich lang und es existiert ein rechter Winkel. Es muss sich um ein Quadrat handeln.

- d) Für eine gerade quadratische Pyramide gilt:

$$V = \frac{1}{3}a^2 \cdot h = \frac{116}{3}$$

Aus Aufgabenteil 3c ist bekannt, dass die Seitenlänge $a = \sqrt{29}$ Längeneinheiten beträgt. Es folgt für h :

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} \cdot 29 \cdot h &= \frac{116}{3} \\ h &= \frac{116}{29} = 4\end{aligned}$$

Bei einer Geraden Pyramide liegt die Spitze über dem Mittelpunkt der Grundfläche. Der Mittelpunkt der Grundfläche entspricht dem Mittelpunkt der Strecke \overline{AC} . Es gilt:

$$\begin{aligned}x_M &= \frac{x_C + x_A}{2} & y_M &= \frac{y_C + y_A}{2} & z_M &= \frac{z_C + z_A}{2} \\ x_M &= \frac{0+3}{2} & y_M &= \frac{9+2}{2} & z_M &= \frac{1+1}{2}\end{aligned}$$

$$M(1,5|5,5|1)$$

Man schlussfolgert auf den Punkt $P_i(1, 5|5, 5|1 \pm 4)$:

$$\underline{\underline{P_1(1, 5|5, 5|5)}}$$

$$\underline{\underline{P_2(1, 5|5, 5|-3)}}$$

4. a) Ich wähle folgenden Ansatz:

$$r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 20,5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rclcl} \text{I} & 2r & - & s & + & 4t & = & 0,5 \\ \text{II} & 5r & + & 7s & & & = & 20,5 \\ \text{III} & 3r & + & 2s & - & 2t & = & 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl} \text{IV} & 8r & + & 3s & & & = & 20,5 \\ \text{V} & 5r & + & 7s & & & = & 20,5 \end{array}$$

$$\text{VI} \quad 41r \qquad \qquad \qquad = \quad 82$$

$$\begin{array}{rcl} r & = & 2 \\ s & = & 1,5 \\ t & = & -0,5 \end{array}$$

Durch Multiplikation der Zeile III mit 2 und anschließender Addition zur Zeile I ergibt sich Zeile IV. Zeile VI ergibt sich durch Multiplikation der Zeile IV mit 7 und der Zeile V mit (-3) und anschließender Addition der beiden Zeilen. Aus dieser Zeile ist abzulesen, dass $r = 2$. Setzt man dies in Zeile IV ein, so kommt man auf $s = 1,5$. Durch Einsetzen von s und r in die Zeile I ergibt sich $t = -0,5$. Für die Linearkombination ergibt sich:

$$\underline{\underline{\vec{x} = 2\vec{a} + 1,5\vec{b} - 0,5\vec{c}}}$$

b) Ich wähle wieder den Ansatz:

$$r \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3-a \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcll} \text{I} & 2r & + & s & = & 5 \\ \text{II} & 3r & + & 3s - as & = & 1 \\ \text{III} & 4r & + & 3s & = & 9 \\ & & & & & \hline \text{IV} & & & s & = & -1 \\ & & & r & = & 3 \end{array}$$

Durch Multiplikation der Zeile I mit (-2) und anschließender Addition zur Zeile III ergibt sich Zeile IV. Durch Einsetzen von s in Zeile III ergibt sich $r = 3$. Nun werden r und s in Zeile II eingesetzt und a bestimmt:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 3 + 3(-1) - a(-1) &= 1 \\ 6 + a &= 1 \\ a &= \underline{\underline{-5}} \end{aligned}$$

c) Damit zwei Vektoren parallel sind, müssen sie linear abhängig sein.

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 2a \\ 5-a \end{pmatrix} = u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ a-8 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcll} \text{I} & 7 & = & 2u \\ \text{II} & 2a & = & 4u \\ \text{III} & 5-a & = & (a^2-8)u \end{array}$$

Aus Zeile I ist abzulesen, dass $u = \frac{7}{2}$. Setzt man dies nun in Zeile II ein, ergibt sich:

$$\begin{aligned} 2a &= 4 \cdot \frac{7}{2} \\ a &= 7 \end{aligned}$$

Setzt man nun a und u in die Zeile III ein, ergibt sich:

$$\begin{aligned} 5 - 7 &= (7^2 - 8) \cdot \frac{7}{2} \\ -2 &= 143,5 \quad \text{falsche Aussage} \end{aligned}$$

Aus der falschen Aussage folgt, dass es keine reelle Zahl a gibt, für die die Vektoren \vec{a} und \vec{b} parallel sind.

5. a) Ein Viereck ist dann ein Trapez, wenn mindestens zwei Seiten zueinander parallel sind. Sind alle gegenüberliegende Seiten zueinander parallel und gleich lang, handelt es sich um ein Parallelogramm. Es gilt also zu überprüfen, ob die gegenüberliegenden Seiten zueinander parallel sind:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren \overrightarrow{AB} und \overrightarrow{CD} sind linear abhängig. Es gilt: $\overrightarrow{AB} = -3 \cdot \overrightarrow{CD}$. Es handelt sich also um Trapez.

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren \overrightarrow{BC} und \overrightarrow{DA} sind nicht linear abhängig. Es kann sich also nicht um ein Parallelogramm handeln.

- b) Der Winkel $\sphericalangle DAB$ ist der Winkel zwischen den Vektoren \overrightarrow{AB} und \overrightarrow{DA} . Über die hessesche Normalenform ergibt sich:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-6)^2 + 3^2 + 6^2} \cdot \sqrt{3^2 + 4^2 + (-4)^2}} \\ \cos \varphi &= \frac{-18 + 12 - 24}{\sqrt{81} \cdot \sqrt{41}} \\ \cos \varphi &= \frac{-30}{9 \cdot \sqrt{41}} \\ \varphi &\approx \underline{\underline{58,63^\circ}} \end{aligned}$$

Für den Flächeninhalt eines Trapezes gilt:

$$A = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$$

Die Seiten a und c sind die beiden parallelen Seiten $|\overrightarrow{AB}|$ und $|\overrightarrow{CD}|$. Der Betrag des Vektors $|\overrightarrow{AB}| = 9$ ist schon bekannt. Weiter gilt:

$$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

Für die Höhe h ist der Abstand der Geraden g durch die Punkte A und B vom Punkt D gesucht. Die Geradengleichung ist folgende:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R})$$

Um den Abstand zu ermitteln stellt man eine Ebenengleichung einer Ebene E auf, die senkrecht zur Geraden g ist und den Punkt D enthält. Dann bestimmt man den Durchstoßpunkt von g durch E und berechnet dessen Abstand zu D .

$$\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}
-6x + 3y + 6z &= 0 \\
-6 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 6 \cdot 2 &= D \\
18 &= D
\end{aligned}$$

$$E: -6x + 3y + 6z = 18$$

Durch Einsetzen der Geraden ermittelt man den Durchstoßpunkt.

$$\begin{aligned}
-6(3 - 6s) + 3(6 + 3s) + 6(-2 + 6s) &= 18 \\
-18 + 36s + 18 + 9s - 12 + 36s &= 18 \\
81s &= 30 \\
s &= \frac{10}{27}
\end{aligned}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{10}{27} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{7}{9} \\ \frac{64}{9} \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

Nun wird nur noch der Abstand zwischen den Punkten $P\left(\frac{7}{9} \mid \frac{64}{9} \mid \frac{2}{9}\right)$ und D berechnet:

$$\begin{aligned}
h &= \sqrt{\left(0 - \frac{7}{9}\right)^2 + \left(2 - \frac{64}{9}\right)^2 + \left(2 - \frac{2}{9}\right)^2} \\
h &= \sqrt{\frac{49}{81} + \frac{2116}{81} + \frac{256}{81}} \\
h &= \sqrt{\frac{2421}{81}}
\end{aligned}$$

Eingesetzt ergibt sich für den Flächeninhalt:

$$A = \frac{1}{2} \cdot (9 + 3) \cdot \sqrt{\frac{2421}{81}} \approx \underline{\underline{32,8}}$$