

Algebra 2

www.schulmathe.npage.de

Aufgaben

- In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(10|0|0)$, $B(0|4|0)$ und $C(0|0|6)$ sowie die Ebenenschar $E_t : 3y + tz - 3t = 0$ ($t \in \mathbb{R}$) gegeben. Die Punkte A , B und C legen eine Ebene F fest.
 - Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene F in parameterfreier Form.
 - Ermitteln Sie den Schnittwinkel der Ebene F mit der $x - y$ -Ebene.
 - Zeigen Sie, dass die Ebene E_2 parallel zur Geraden g durch die Punkte B und C ist.
 - Zeigen Sie, dass keine der Ebenen E , parallel zur Ebene F ist.
 - Berechnen Sie den Wert von t , für den die Ebenen E und F , orthogonal sind.
 - Der Koordinatenursprung O und die Punkte A , B und C bilden eine Pyramide. Ermitteln Sie das Volumen dieser Pyramide.
- In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Ebene $E : 2x + z = 3$ und für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Gerade $g_t : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2+t \\ 1 \\ 1+t \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1+t \\ 1-t \\ t \end{pmatrix}$ gegeben.
 - Es gibt genau einen Wert von t , so dass die Gerade g_t in der Ebene E liegt. Bestimmen Sie diesen Wert von t .
Berechnen Sie für alle übrigen Werte von t den Durchstoßpunkt D der Geraden g_t durch die Ebene E .
 - Bestimmen Sie den Wert von t , für den die Gerade g_t senkrecht zur Ebene E ist.
 - Ermitteln Sie die Gleichung einer Ebene F , die parallel zu E verläuft und von E einen Abstand von $\frac{15}{\sqrt{5}}$ hat.

Lösungen

1. a) Für die Ebene F ergibt sich aus der Dreipunkteform:

$$F: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AC} \quad (s, t \in \mathbb{R})$$
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Um die parameterfreie Form zu bestimmen, stellt man folgendes Gleichungssystem auf:

$$\begin{array}{l} \text{I} \qquad \qquad \qquad x = 10 - 10s - 10t \\ \text{II} \qquad \qquad \qquad y = 0 + 4s \\ \text{III} \qquad \qquad \qquad z = 0 \qquad \qquad \qquad + 6t \\ \hline \text{IV} \qquad \qquad \qquad x + 2,5y = 10 - 10t \\ \text{V} \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad z = 0 + 6t \\ \hline \text{VI} \quad \underline{\underline{3x + 7,5y + 5z = 30}} \end{array}$$

Die Zeile IV ergibt sich aus Multiplikation der Zeile II mit 2,5 und anschließender Addition zur Zeile I. Die parameterfreie Ebenengleichung folgt aus Multiplikation der Zeile IV mit 3 und der Zeile V mit 5 und anschließender Addition der beiden Zeilen.

- b) Der Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen entspricht dem Schnittwinkel zwischen deren Normalenvektoren und es gilt:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n}_F \cdot \vec{n}_{xy}}{|\vec{n}_F| \cdot |\vec{n}_{xy}|}$$

Der Normalenvektor der Ebene F ist aus der Ebenengleichung abzulesen und der Normalenvektor der $x - y$ -Ebene zeigt nur in z -Richtung. Also gilt:

$$\begin{aligned}
\cos \varphi &= \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 7,5 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{3^2 + 7,5^2 + 5^2} \cdot \sqrt{1}} \\
&= \frac{3 \cdot 0 + 7,5 \cdot 0 + 5 \cdot 1}{9,5} \\
&= \frac{10}{19} \\
\varphi &\approx \underline{\underline{58,24^\circ}}
\end{aligned}$$

c) Für die Gerade g ergibt sich aus der Zweipunkteform:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad (u \in \mathbb{R})$$

Durch Einsetzen von g in E_2 ergibt sich:

$$\begin{aligned}
3(4 - 4u) + 2(0 + 6u) - 6 &= 0 \\
12 - 12u + 12u - 6 &= 0 \\
6 &\neq 0
\end{aligned}$$

Die sich ergebende Ungleichheit ist darauf zurückzuführen, dass kein Durchstoßpunkt existiert. Also muss gelten: $g \parallel E_2$.

d) Damit zwei Ebenen parallel zueinander sind, muss für den „Schnittwinkel“ $\varphi = 0$ gelten. Für den Kosinus gilt: $\cos(0) = 1$. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7,5 \\ 5 \end{pmatrix}}{\sqrt{3^2 + t^2} \cdot \sqrt{3^2 + 7,5^2 + 5^2}} \\
1 &= \frac{22,5 + 5t}{\sqrt{9 + t^2} \cdot 9,5} \\
(9 + t^2) \cdot 9,5^2 &= (22,5 + 5t)^2 \\
812,25 + 90,25t^2 &= 506,25 + 225t + 25t^2 \\
0 &= 65,25t^2 - 225t + 306 \\
0 &= t^2 - \frac{900}{261}t + \frac{1224}{261}
\end{aligned}$$

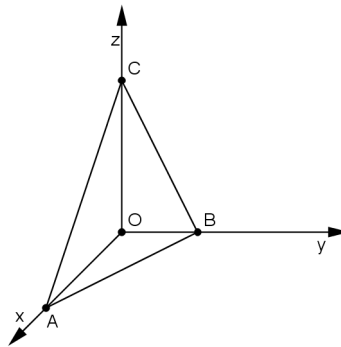
$$t = \frac{900}{522} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{900}{522}\right)^2 - \frac{1224}{261}}_{< 0}}$$

Aufgrund des negativen Terms unter der Wurzel gibt es keine reelle Lösung. Somit gilt: $E_t \nparallel F$.

- e) Wenn die beiden Ebenen orthogonal sind, muss das Skalarprodukt deren Normalenvektoren 0 sein. Also gilt:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7,5 \\ 5 \end{pmatrix} &= 0 \\ 22,5 + 5t &= 0 \\ t &= \underline{\underline{-4,5}} \end{aligned}$$

- f) Skizze:



Für das Volumen einer Pyramide gilt allgemein:

$$V = \frac{1}{3} A_G \cdot h$$

Ich nehme das Dreieck OAB als Grundfläche und es gilt:

$$\begin{aligned} A_G &= \frac{1}{2} \cdot |\vec{OA}| \cdot |\vec{OB}| \\ h &= |\vec{OC}| \end{aligned}$$

Eingesetzt ergibt sich:

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{6} \cdot 10 \cdot 4 \cdot 6 \\V &= \underline{\underline{40}}\end{aligned}$$

2. a) Wenn die Gerade g in der Ebene E liegt, muss ihr Richtungsvektor senkrecht zum Normalenvektor der Ebene sein. Also ist das Skalarprodukt der beiden Vektoren 0.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+t \\ 1-t \\ t \end{pmatrix} &= 0 \\2 + 2t + t &= 0 \\t &= -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

Für $t = -\frac{2}{3}$ ist die Gerade g_t parallel zur Ebene E . Nun muss noch geprüft werden, ob diese Gerade tatsächlich in der Ebene liegt. Durch Einsetzen der Geraden- in die Ebenengleichung erhält man:

$$\begin{aligned}2 \left(\frac{4}{3} + s \cdot \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3} - s \cdot \frac{2}{3} &= 3 \\ \frac{8}{3} + \frac{2}{3}s + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}s &= 3 \\ 3 &= 3\end{aligned}$$

Durch diese wahre Aussage wird bestätigt, dass die Gerade g_t mit $t = -\frac{2}{3}$ in der Ebene E liegt.

Um den Durchstoßpunkt D zu ermitteln setzt man die Geradengleichung in die Ebenengleichung ein.

$$\begin{aligned}2[2 + t + s \cdot (1 + t)] + 1 + t + st &= 3 \\4 + 2t + 2s + 2st + 1 + t + st &= 3 \\(2 + 3t)s &= -2 - 3t \\s &= \frac{-2 - 3t}{2 + 3t} \\s &= -1\end{aligned}$$

Setzt man dies nun in die Ebenengleichung ein, ergibt sich der Durchstoßpunkt:

$$\underline{\underline{D(1|t|1)}}$$

- b) Wenn eine Gerade senkrecht zu einer Ebene ist, dann ist sie parallel zum Normalenvektor der Ebene. Der Winkel zwischen den beiden Vektoren ist 0 . $\cos(0) = 1$ und es folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+t \\ 1-t \\ t \end{pmatrix}}{\sqrt{2^2+1^2} \cdot \sqrt{(1+t)^2+(1-t)^2+t^2}} &= 1 \\ \frac{2+2t+t}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{1+2t+t^2+1-2t+t^2+t^2}} &= 1 \\ 2+3t &= \sqrt{5} \cdot \sqrt{3t^2+2} \\ 4+12t+9t^2 &= 15t^2+10 \\ 0 &= 6t^2-12t+6 \\ 0 &= t^2-2t+1 \\ t &= 1 \pm \sqrt{1-1} \\ t &= \underline{\underline{1}} \end{aligned}$$

- c) Da die beiden Ebenen parallel sind, können sie sich nur im konstanten Summanden D unterscheiden:

$$\begin{aligned} E : 2x + z &= 3 \\ F : 2x + z &= D \end{aligned}$$

Über die hessesche Normalenform kann man den Abstand d eines Punktes von einer Ebene berechnen. Dazu wählt man sich einen beliebigen Punkt der Ebene E . Ich wähle $P(1|0|1)$. Über die Koordinatendarstellung ergibt sich:

$$\begin{aligned} d &= \left| \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - D}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \right| \\ \frac{15}{\sqrt{5}} &= \left| \frac{3 - D}{\sqrt{5}} \right| \\ 15 &= |3 - D| \end{aligned}$$

$$D_1 = 18$$

$$D_2 = -12$$

Daraus folgt für die Ebenengleichungen:

$$F_1 : \underline{\underline{2x + z = 18}}$$

$$F_2 : \underline{\underline{2x + z = -12}}$$