

Algebra 4

www.schulmathe.npage.de

Aufgaben

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(1|2|1)$, $B(3|1|3)$, $C(5|3|2)$, $D(3|4|0)$ und $S\left(\frac{3}{2}|\frac{11}{2}|\frac{9}{2}\right)$ gegeben.

- a) Die Punkte A , B und C liegen in einer Ebene E_1 .
Stellen Sie für die Ebene E_1 eine Parametergleichung und eine Gleichung in parameterfreier Form auf.
Weisen Sie nach, dass die Punkte A , B , C und D Eckpunkte eines Quadrates sind.
- b) Der Punkt S ist die Spitze der Pyramide $ABCDS$. Von der Spitze S wird das Lot auf die Ebene, welche die Grundfläche der Pyramide enthält, gefällt.
Berechnen Sie die Koordinaten des Lotfußpunktes F .
Zeigen Sie, dass die Pyramide $ABCDS$ eine gerade Pyramide ist.
Berechnen Sie das Volumen der Pyramide $ABCDS$ und die Größe des Winkels zwischen der Grundfläche $ABCD$ und eine der Seitenflächen der Pyramide.
- c) Die Pyramide $ABCDS$ wird von einer zur Ebene E_1 parallelen Ebene E_2 geschnitten, so dass das Volumen des dadurch entstehenden Pyramidenstumpfes $\frac{19}{2}$ beträgt.
Stellen Sie für die Ebene E_2 eine Gleichung in parameterfreier Form auf.

Lösungen

a) Mit der Dreipunktgleichung ergibt sich als Ebenengleichung:

$$\vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AC} \quad (s, t \in \mathbb{R})$$
$$E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s, t \in \mathbb{R})$$

Zur Bestimmung der parameterfreien Form wird folgendes LGS gelöst:

$$\begin{array}{lcl} \text{I} & x = & 1 + 2s + 4t \\ \text{II} & y = & 2 - s + t \\ \text{III} & z = & 1 + 2s + t \\ \hline \text{IV} & x - 4y = & -7 + 6s \\ \text{V} & -y + z = & -1 + 3s \\ \hline E_1 : & x - 2y - 2z = & -5 \end{array}$$

Zeile IV ergibt sich durch Multiplikation von Zeile II mit (-4) und anschließender Addition zur Zeile I. Zeile V ergibt sich durch Multiplikation von Zeile II mit (-1) und anschließender Addition zur Zeile III. Die parameterfreie Ebenengleichung der Ebene E_1 ergibt sich durch Multiplikation der Zeile V mit (-2) und anschließender Addition zur Zeile IV.

Zunächst wird durch Einsetzen geprüft, ob der Punkt D in der Ebene E_1 liegt:

$$-5 = 3 - 2 \cdot 4 - 2 \cdot 0 = 3 - 8 = -5$$

Der Punkt D erfüllt die Ebenengleichung. $D \in E_1$.

Nun wird geprüft, ob alle Seiten gleich lang sind:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |\vec{AB}| &= |\vec{DC}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3 \\ |\vec{BC}| &= |\vec{AD}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3 \end{aligned}$$

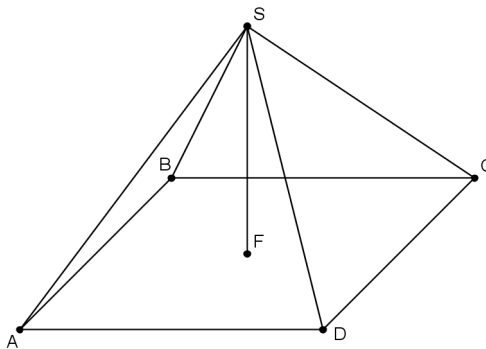
Alle Seiten sind gleich lang. $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = 3$

Ist nun noch ein Winkel 90° handelt es sich um ein Quadrat. Ist das Skalarprodukt zweier Vektoren 0, sind diese orthogonal zueinander:

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 0$$

Alle Punkte des Vierecks $ABCD$ liegen in einer Ebene. Die Seiten des Vierecks $ABCD$ sind gleich lang und es existiert ein rechter Winkel. Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat.

b) Skizze:



Zur Berechnung der Koordinaten des Punktes F wird eine Geradengleichung für eine Gerade g aufgestellt, die senkrecht zur Ebene E_1 und durch den Punkt S verläuft. Der Normalenvektor der Ebene ergibt sich aus der parameterfreien Gleichung und der Stützvektor der Geraden entspricht dem Ortsvektor des Punktes S :

$$\begin{aligned} g: \vec{x} &= \vec{OS} + s \cdot \vec{n} \quad (s \in \mathbb{R}) \\ g: \vec{x} &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{11}{2} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Zur Bestimmung des Durchstoßpunktes F der Geraden g durch die Ebene E_1 , wird die Geradengleichung in die Ebenengleichung eingesetzt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2} + s\right) - 2 \cdot \left(\frac{11}{2} - 2s\right) - 2 \cdot \left(\frac{9}{2} - 2s\right) &= -5 \\ \frac{3}{2} + s - 11 + 4s - 9 + 4s &= -5 \\ 9s &= \frac{27}{2} \\ s &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Wird s nun in die Geradengleichung eingesetzt, ergeben sich die Koordinaten des Punktes F :

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{11}{2} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Der Punkt $F(3|2,5|1,5)$ ist der gesuchte Lotfußpunkt.

Handelt es sich um eine gerade Pyramide, so müssen sich die Diagonalen der Grundfläche im Lotfußpunkt F schneiden. Dazu werden zwei Geradengleichungen aufgestellt. Die Gerade h verläuft durch die Punkte A und C und die Gerade i verläuft durch die Punkte B und D :

$$\begin{aligned} h : \vec{x} &= \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & (t \in \mathbb{R}) \\ i : \vec{x} &= \overrightarrow{OB} + u \cdot \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} & (u \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Durch Gleichsetzen der Geradengleichungen ergibt sich ein Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcll} \text{I} & 1 & + & 4t & = & 3 \\ \text{II} & 2 & + & t & = & 1 + 3u \\ \text{III} & 1 & + & t & = & 3 - 3u \\ \hline & & & & & \\ \text{IV} & & & t & = & \frac{1}{2} \\ \text{V} & & & u & = & \frac{1}{2} \end{array}$$

Aus Gleichung I ist zu schließen, dass $t = \frac{1}{2}$. Wird dies nun in die Gleichungen II und III eingesetzt, ergibt sich für $u = \frac{1}{2}$. Zur Bestimmung des Schnittpunktes wird t oder u in die jeweilige Geradengleichung eingesetzt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt der Diagonalen entspricht dem Lotfußpunkt F . Die Pyramide $ABCD$ ist eine gerade Pyramide.

Die allgemeine Volumenformel für Pyramiden $V = \frac{1}{3} A_G \cdot h$ lässt sich in $V = \frac{1}{3} \overline{AB}^2 \cdot h$ vereinfachen, da die Grundfläche quadratisch ist. Die Höhe h ergibt sich aus dem Abstand der Punkte F und S :

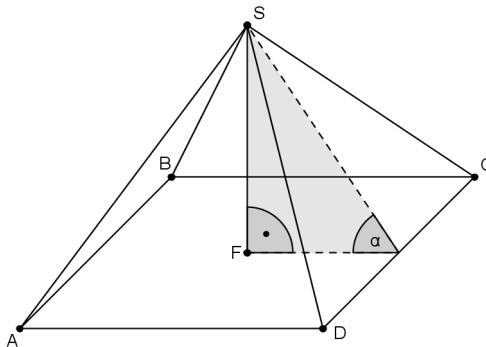
$$h = |\overrightarrow{FS}| = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - 3\right)^2 + \left(\frac{11}{2} - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2} - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{9}{2}$$

Es ergibt sich somit für das Volumen:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot \frac{9}{2} = \frac{27}{2}$$

Das Volumen der Pyramide $ABCD$ beträgt $V = 13,5$.

Skizze:



Im rechtwinkligen Dreieck gilt:

$$\tan \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$$

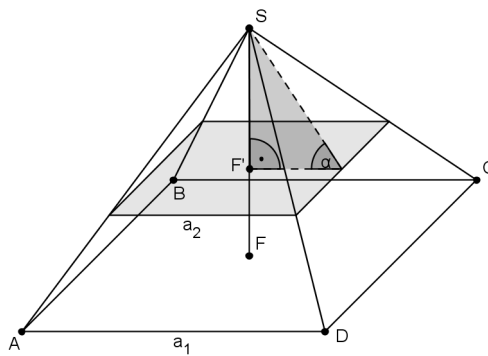
Die Ankathete (die Strecke vom Punkt F bis zur Seite der quadratischen Grundfläche) ist halb so lang wie die Seiten der quadratischen Grundfläche. Die Gegenkathete entspricht der Höhe der Pyramide:

$$\tan \alpha = \frac{\frac{1}{2} \cdot \overline{AD}}{h} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{9}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$\alpha \approx 18,43^\circ$$

Der Winkel zwischen Seiten- und Grundfläche beträgt etwa $\alpha \approx 18,43^\circ$.

c) Skizze:



Die Volumenformel für quadratische Pyramidenstümpfe lautet:

$$V = \frac{1}{3} h' \cdot (a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2) \quad \text{mit} \quad h' = \overline{FF'}$$

Hier beträgt $\alpha \approx 18,43^\circ$ wie in Aufgabenteil b). Für die Strecken $\overline{SF'}$ und $\frac{1}{2} a_2$ gilt wieder die Beziehung:

$$\tan \alpha = \frac{1}{3} = \frac{\frac{1}{2} a_2}{\overline{SF'}}$$

$$\overline{SF'} = \frac{3}{2} \cdot a_2$$

Weiter gilt:

$$h' = h - \overline{SF'} = h - \frac{3}{2} \cdot a_2$$

Nun wird alles in die Volumenformel eingesetzt:

$$\begin{aligned}\frac{19}{2} &= \frac{1}{3} \left(\frac{9}{2} - \frac{3}{2} \cdot a_2 \right) \cdot (9 + 3a_2 + a_2^2) \\ \frac{19}{2} &= \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}a_2 \right) \cdot (9 + 3a_2 + a_2^2) \\ \frac{19}{2} &= \frac{27}{2} + \frac{9}{2}a_2 + \frac{3}{2}a_2^2 - \frac{9}{2}a_2 - \frac{3}{2}a_2^2 - \frac{1}{2}a_2^3 \\ \frac{1}{2}a_2^3 &= \frac{8}{2} \\ a_2 &= \sqrt[3]{8} = 2\end{aligned}$$

Für die Höhe h' des Pyramidenstumpfes ergibt sich:

$$h' = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} \cdot 2 = \frac{3}{2}$$

Der Abstand der beiden Ebenen E_1 und E_2 beträgt somit $h' = \frac{3}{2}$.

Mit der hesseschen Normalenform wird nun die Ebenengleichung der Ebene E_2 bestimmt (siehe Skript). Dazu wird der Punkt A genutzt:

$$\begin{aligned}\frac{3}{2} &= \left| \frac{1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - D}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} \right| \\ \frac{3}{2} &= \left| \frac{-5 - D}{3} \right| \\ \frac{9}{2} &= |-5 - D| \\ D_1 &= -\frac{1}{2} \\ D_2 &= -\frac{19}{2}\end{aligned}$$

D_1 entfällt, da diese Ebene „unter“ der Pyramide liegen würde. Für die Ebene E_2 gilt die Gleichung:

$$E_2 : x - 2y - 2z = -\frac{19}{2}$$